

Bolzano, a formação da Matemática Pura e a aritmetização da Matemática

Humberto de Assis Clímaco – UFG

Michael Friedrich Otte – Uniban/Bielefeld

Bernard Bolzano (1781-1848) foi um matemático, teólogo e filósofo de língua alemã nascido em Praga, na Bohemia, hoje capital da República Tcheca. Sua obra se insere no contexto das grandes transformações por que passaram a matemática e a filosofia no século XIX, em particular com o movimento de aritmetização – que transformou a matemática– e com a tendência da filosofia a passar de uma abordagem epistemológica, centrada no sujeito cognoscente e num discurso mental e intuitivo – que caracterizou o período que vai do cartesianismo ao kantismo, chamado por Foucault (2007) de “época das representações” – para uma abordagem semântica. Esta última se caracteriza por ser centrada na necessidade de criação e explicitação de conceitos, de uma revalorização da lógica e nas necessidades de um discurso explícito e público. Para os filósofos da “época das representações”, como Leibniz (1646-1716), Locke (1632-1704) e Berkeley (1685-1753), as verdades se baseavam nas relações entre as ideias, enquanto para alguns filósofos do século XIX, como Bolzano e Frege (1848-1925), elas representam relações entre proposições.

Bolzano foi o mais importante representante na Bohemia do Iluminismo Católico, movimento criado pelo Império Austríaco como forma se proteger do avanço dos ideais da Revolução Francesa e das tropas napoleônicas, mas que na Bohemia transformou-se numa forma de combater a autoridade do Império Austríaco – que nessa época controlava o Reino da Bohemia – e suas arbitrariedades. Bolzano deixou um importante legado matemático, filosófico e religioso, marcado pela luta por justiça e contra toda forma de arbitrariedade. Seu lema era guiar-se, em todos os aspectos da vida pela “lei moral maior”, que consistia em “sempre estar num caminho que promoverá o bem comum” (BOLZANO, 1976).

A concepção de matemática de Bolzano e seus esforços de reforma do conhecimento são inseparáveis do processo de expansão do ensino e das necessidades de divulgação do conhecimento para um público muito mais amplo do que as pequenas comunidades de matemáticos do século XVIII. Nesta época surgiram as primeiras grandes turmas de Engenharia. Assim, sua busca por reforma do conhecimento é inseparável de

aspectos de comunicação e linguagem, por sua vez inseparáveis de fins didáticos, e colocaram no centro a necessidade de uma abordagem semântica da filosofia.

Por outro lado, a amplitude dos estudos empreendidos por Bolzano, bem como sua crença em que o conhecimento contribui para a realização da justiça, são semelhantes às concepções dos Iluministas do século XVIII: para ele, as diferentes áreas do conhecimento formavam uma unidade profunda, que ele tentou sistematizar em seu *Wissenschaftslehre* (BOLZANO, 1981). Foi como professor de Ciências da Religião que ele escreveu seu principal artigo matemático, o “Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação”¹ em 1817 e o “Sobre a relação entre as duas raças na Boêmia” em 1816 (BOLZANO, 1989).

É no contexto da busca por eliminar toda forma de arbitrariedade e fazer justiça que deve ser compreendido o projeto de Bolzano de reconstruir os fundamentos da Matemática com base em provas puramente analíticas, independentes da capacidade ou percepção subjetivas.

Embora haja estudos que mostrem que filósofos e matemáticos do final do século XIX como Frege (1848-1925), Cantor (1845-1918) e Weierstrass (1815-1897), e seu contemporâneo Cauchy (1789-1857), tenham conhecido pelo menos parte de sua obra², o patrimônio intelectual de Bolzano não foi gerido por seus discípulos de maneira que conseguisse evitar que ele praticamente caísse no esquecimento no ambiente acadêmico. Embora na Bohemia suas ideias sociais, educacionais e religiosas tenham sido assumidas e divulgadas por gerações de seguidores – que chegaram a obter notável influência (cf. SKED, 2000) – o domínio do idealismo alemão sobre a filosofia, o distanciamento de Bolzano dos grandes centros matemáticos e a incompreensão por parte dos matemáticos destes grandes centros da profundidade das propostas de Bolzano, tornaram seus escritos de difícil acesso e aceitação para seus contemporâneos.

O ideal de Bolzano de uma profunda reorganização de todo o conhecimento humano só se tornaria influente na matemática, na filosofia e na linguagem, a partir da segunda metade do século XIX, e seu nome permaneceu muito pouco conhecido nos

¹ É o artigo que contém a demonstração do *Teorema de Bolzano*, cuja generalização é o *Teorema do Valor Intermediário*, ao qual nos referiremos em diversas ocasiões neste artigo, e que pode ser encontrado em qualquer livro didático de Cálculo e de Análise Matemática.. De agora em diante, o artigo será denominado RB, como é o padrão internacional de citações de Bolzano, em referência às iniciais das duas primeiras palavras que aparecem em maiúsculo no título do artigo – Rein e Beweis).

² A respeito dessa questão, ver Dugac (1972, 1980), Freudenthal (1971), Sundholm (2000), Sinaceur (1973).

grandes centros até que foi “redescoberto” por Hermann Hankel (1839-1873) e por Otto Stolz (1842–1905). Esse último republicou em 1881 vários de seus artigos matemáticos³.

Os filósofos viriam a conhecer a obra de Bolzano e reconhecer sua originalidade somente quando Brentano (1824-1898), então colega de Robert Zimmermann⁴ (1838-1917) e professor de Edmund Husserl (1859-1938), realizou um seminário, na Universidade de Viena, no inverno de 1884-1885 (LAPOINTE, 2003, p. 14) sobre o livro de Bolzano “Paradoxos do Infinito” (1991, 1851). Tal apresentação fez despertar a curiosidade de seus estudantes, em particular de Husserl e de Kazimierz Twardowski (1866-1938), que – sob a influência de Bolzano – se teceu críticas à teoria da intencionalidade de Brentano, em sua tese de habilitação⁵. Husserl, por outro lado, teria uma “crucial inspiração” (WOODRUFF, 2007, p. 16) para a construção de sua fenomenologia na concepção de Bolzano de que a lógica trata de “proposições em si” independentes do pensamento

É por meio de Twardowski que as ideias de Bolzano viriam a influenciar a escola polonesa de lógica que ele viria a fundar, bem como a criação, nesta mesma escola, da concepção de lógica como teoria formal das teorias dedutivas, o que por sua vez influenciaria a criação da filosofia analítica (LAPOINTE, 2003)⁶.

Houve, ao longo da história uma série de tentativas de reeditar as obras completas de Bolzano (HYKSOVA, 2000), mas até o final da década de 60 do século XX, surgiriam apenas reedições parciais. É nesta época que viria a se realizar, sob iniciativa de Eduard Winter e de Jan Berg, o projeto de uma edição completa, em 126 volumes, dos quais até hoje foram publicados 69. Em 1991 foi criada a “Sociedade Bolzano”, e no final da década

³ Schubring (1993) mostra que três importantes artigos matemáticos redigidos por Bolzano tiveram suas resenhas publicadas num periódico não especializado ao qual os matemáticos de Berlim tinham acesso; e também que matemáticos importantes da época, como Creele (1780-1855) e Abel (1802-1829) conheceram estes artigos. No entanto, sua afirmação de que “pode-se deduzir... que Berlim foi um centro de recepção e transmissão do trabalho matemático de Bolzano” (1993, p. 50) não se sustenta, pois não foi encontrado nenhum grande matemático da época que tenha citado Bolzano em uma de suas obras. O fato incontornável, se se pretende analisar o legado de Bolzano, é que suas ideias não foram assimiladas por seus contemporâneos, e o próprio Bolzano reconhece isso, em 1817, no prefácio do RB. Não houve fatos significativos que possibilitassem que essa avaliação mudasse nos anos seguintes.

⁴ Zimmermann havia ficado em posse de grande parte dos manuscritos de Bolzano, além de ter sido por ele encarregado de finalizar seu *Großenlehre* (Doutrina das Grandezas). No entanto, sua viragem doutrinária lhe deixou desinteressado de continuar herdeiro da obra de Bolzano.

⁵ “Sobre o conteúdo e o objeto das representações” (1977).

⁶ Devido ao fato de que Frege e diversos matemáticos que conheceram a obra de Bolzano não o tenham citado, a filosofia analítica e a matemática se desenvolveriam de maneira relativamente inconsciente da herança que receberam de Bolzano.

de 90 começou a ser publicado um órgão de divulgação permanente das obras de Bolzano, o *Beiträge zur Bolzano Forschung*.

Nos dias atuais, a obra de Bolzano é estudada por filósofos e historiadores da filosofia que buscam em seus escritos a história do combate filosófico da fenomenologia e da filosofia analítica contra o psicologismo, as origens do debate em torno da intencionalidade, a transformação da filosofia de epistemologia para a ontologia semântica, ou ainda por educadores, filósofos e cientistas da computação que buscam em sua obra – em particular, em sua concepção de *Abfolge* (explicação causal ou relação fundamento-consequência) – uma alternativa para o formalismo matemático e filosófico.

Em língua portuguesa quase não há nada publicado sobre Bolzano; no Brasil, somente foram encontrados os trabalhos de Otte e Clímaco (2010), Clímaco (2007a, 2007b, 2008 e 2011), Porta (2002, 2003 e 2004, os dois primeiros em espanhol) e Cavallès (2012). Há também duas dissertações de mestrado orientadas pelo professor Benedito Antônio da Silva, da PUC-SP, que abordam os estudos de Bolzano sobre o infinito e refletem sobre ele do ponto de vista didático. Num livro didático de Iezzi e Murakami (2005) aparecem informações equivocadas e anedóticas, sob um título sensacionalista (“Padre refugia-se na matemática”) numa nota histórica.

Além das traduções da obra de Bolzano para a língua portuguesa publicadas na dissertação de mestrado de Clímaco (2007a), há somente poucos trechos em português em obras de história da lógica (KNEALE/KNEALE, 1991), história da matemática ou em notas históricas de livros didáticos de matemática (ÁVILA, 1999).

Na Educação Matemática, além das dissertações supracitadas, existem as publicações da pesquisadora mexicana Waldegg (2005), muitas delas em inglês, sobre as implicações didáticas da noção de infinito que Bolzano desenvolveu.

O problema que se pretende abordar neste artigo é o de compreender melhor a transformação da linguagem matemática ocorrida no final do século XVIII e início do século XIX, destacar suas finalidades didáticas e – paradoxalmente – as novas dificuldades didáticas que criou, e como se deu a relação destas transformações com aquelas que ocorreram nas ciências, na filosofia e na cultura no período em questão, inseparáveis por sua vez das necessidades de comunicação social que surgiram.

Pretende-se ainda mostrar que as transformações ocorridas na matemática, além de não serem resultados de mera opção dos matemáticos e filósofos, não foram resultados da

ação consciente de grupos de poderes ou de determinadas etnias, e sim correspondiam a necessidades externas e internas à matemática da época, bem como se inserem no conjunto das transformações pelas quais passaram elementos diversos da época: a cultura, a indústria e as ciências em geral.

O estudo da obra de Bolzano torna possível compreender com bastante clareza os fundamentos filosóficos e matemáticos das transformações supracitadas, pois, como filósofo que estudava a matemática com interesses principalmente filosóficos (cf BOLZANO, 1976), ele afirmou os princípios que regiam e fundamentavam tais transformações com maior clareza e consciência do que qualquer um de seus contemporâneos, embora nem de longe tenha sido um dos mais produtivos matemáticos da época; também permite compreender a natureza e o contexto em que ocorreram tais transformações.

É importante notar que quase não há publicações que reflitam sobre as necessidades educacionais e de comunicação que contribuíram para impulsionar as transformações ocorridas na matemática na virada do século XVIII para o XIX, nem sobre seus impactos sociais e educacionais.

O que sim existem são estudos sobre a Reforma da Matemática Moderna, que foi a tentativa de levar para a sala de aula dos ensinos médio e fundamental a matemática tal como foi desenvolvida a partir do século XIX⁷. Mas estas publicações não fazem, nem é seu propósito fazê-lo, um estudo criterioso da natureza das transformações estudadas no presente artigo.

Os estudos recentes no Brasil que mais se aproximam de uma reflexão a respeito das transformações sofridas pela matemática no século XIX são os artigos de DIAS *et al.*, (2010) e DIAS (2008). Mas estes trabalhos analisam apenas de maneira secundária o que será abordado nesse artigo, pois são estudos sobre a história do ensino da matemática; e quando tratam da questão aqui abordada, o fazem sem realizar uma reflexão mais cuidadosa sobre a relação da aritmetização com o desenvolvimento das ciências e tecnologias, e terminam por julgar que o distanciamento da Matemática do senso comum ocorrido a partir desse processo ocorreu devido a necessidades de profissionalização da matemática, que por sua vez seria consequência de “interesses políticos, culturais e

⁷ Merecem destaque as publicações do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática da CNPQ (GHEMAT), inspirado num projeto mais amplo que realizou trabalho semelhante em diversos países do mundo.

sociais” (DIAS, 2010, p. 3). Além disso, tais artigos ignoram que, se de um lado não é possível determinar que as transformações da matemática ocorridas no século XIX eram inevitáveis, de outro é impossível conceber que o desenvolvimento das ciências e tecnologias, bem como a Revolução Industrial, poderiam ter ocorrido sem que tivesse se dado, de uma forma ou de outra, algum fenômeno de aritmetização, fundamental para medir e prever, condições necessárias para o surgimento das ciências aplicadas e da grande indústria.

Para compreender a natureza da transformação da linguagem matemática ocorrida nesta época, a crítica que Bolzano dedicou a Kant (1724-1804) deve ser retomada, pois ela é exemplar das transformações ocorridas em todas as áreas do conhecimento e da cultura do início do século XIX, e mostra com clareza a ruptura que começa a se operar no início do século XIX na cultura e em todas as áreas do conhecimento.

Mas, afinal, que transformações foram estas? O que é que elas têm em comum com aquelas ocorridas no conhecimento matemático deste período, que tornam a obra de Bolzano tão significativa e sua crítica a Kant tão exemplar?

Para responder tais questões, é necessário retomar algumas características da filosofia e da matemática da “época da representação”, caracterizada por Foucault (2007) como aquela em que há uma identificação entre a representação e o conceito representado, e pelos historiadores da filosofia como o período epistemológico.

A obra de Kant expressou filosoficamente várias características desta época. Ela é, como a de Descartes, inseparável das transformações ocorridas com a Revolução Científica dos séculos XVI e XVII, que havia feito com que a matemática se voltasse para questões práticas, em detrimento das especulativas. Na filosofia, cresceu a ideia de que o conhecimento escolástico, e a lógica, haviam se tornado inúteis e , incapazes de revelar novas descobertas, ou de que a lógica já não tinha mais o que desenvolver (ver Descartes (1983), Bacon (2005), Kant (2001)).

Neste período, a noção de rigor grego, bem como uma abordagem qualitativa e estética da matemática, foram sendo substituídos por uma matemática voltada para resolver problemas práticos, relacionados ao comércio, à mecânica e à astronomia, predominantemente quantitativa e voltada para a medida e a previsão.

Antes ainda do século XVI, muitos dos homens de saber já afirmavam que o rigor grego havia se tornado um obstáculo para o desenvolvimento de novos métodos

científicos. Em particular, no século XVII, o abandono desse rigor contribuiu para o forte desenvolvimento da Matemática, sobretudo do então conhecido como “cálculo diferencial e integral”. No entanto, a falta de rigor gerou uma situação em que os próprios criadores do cálculo, Newton e Leibniz, bem como gerações de seguidores, não conseguiam explicar os fundamentos lógicos dos mais importantes procedimentos criados.

Leibniz justificava o princípio da continuidade – o segundo princípio fundamental de sua filosofia, que também ocupava um papel fundamental no cálculo – por meio da necessidade de uma análise perpetua, ou seja, a indispensabilidade do infinito potencial. De acordo com esta concepção, cada substância individual deveria ser caracterizada pelo seu conceito completo – pois para o racionalismo cada evento tem que ter uma causa – e para entender esta causa seria necessária uma análise infinita dos conceitos (o que somente Deus, supostamente, poderia fazer).

Leibniz acreditava que o cálculo exigia explicações metafísicas, ao mesmo tempo em que se apoiava em analogias com a continuidade percebida na natureza; mas as leis matemáticas da natureza não explicam, nem podem explicar, nada de essencial, mas somente descrever os fatos em termos gerais. Além disso, para realizar operações com derivadas, Leibniz se apoiava em conceitos geométricos.

Newton, por outro lado, compreendeu melhor o caráter não filosoficamente racionalista do cálculo e da física, mas tampouco conseguiu fundamentar adequadamente o cálculo, recorrendo às noções de espaço e tempo, e mesmo se contradizendo (ver, por exemplo, STRUIK, 1989).

No século XVIII, quando o cálculo havia se desenvolvido e aplicado em todos os ramos da Matemática, a falta de fundamentos fez surgir novos problemas: mesmo, Euler (1707-1783), talvez o maior matemático do século, chegou a resultados contraditórios, como $-\frac{1}{2} = \infty$ (ver Struik (1989) e Rusnock (1997)).

Além disso, Euler definiu funções contínuas como aquelas possíveis de se representar por meio de uma única expressão analítica, identificando a continuidade como uma característica da representação simbólica da função, e não do conceito de função, que ele não considerava como um objeto próprio da matemática; alguns anos depois, Kant ainda identificava a ideia de triângulo com a representação de um triângulo particular (CRP, A 714 B 742).

Apesar de todas as dificuldades relativas aos fundamentos, o período que vai do início da Revolução Científica (início do século XVI) até o início da segunda fase da Revolução Industrial (início do século XIX), foi de uma produtividade enorme da matemática, e foi nesta época que, pela primeira vez, ela consegue desvelar grande parte dos fenômenos que até a Idade Média tinham seu funcionamento obscuro.

No século XIX, ocorre uma mudança qualitativa, que muda a ênfase do sujeito para o social, do particular e do empírico para o geral, da intuição para a comunicação e o conceitual. Raymond Williams (2011, p. 16-17) explica como estas mudanças se expressaram na formação de palavras e sua relação com as mudanças culturais e sociais no período que ele situa entre as últimas décadas do século XVIII e a primeira do século XIX:

Cinco palavras são os pontos-chave a partir dos quais esse mapa pode ser desenhado. São elas indústria, democracia, classe, arte e cultura... As mudanças em seu uso, naquele período crítico, revelam uma mudança geral nas nossas maneiras características de pensar sobre nossa vida comum: sobre nossas instituições sociais, políticas e econômicas; sobre os objetivos que essas instituições são destinadas a representar; e sobre as relações com essas instituições e os objetivos de nossas atividades no aprendizado, na educação e nas artes.

A primeira palavra importante é indústria e o período em que seu uso se modifica é o período que agora chamamos de Revolução Industrial. Indústria, antes dessa época, designava um atributo humano específico... nas últimas décadas do século XVIII, indústria passou também a significar... uma palavra coletiva para nossas instituições manufatureiras e produtivas e para suas atividades gerais... O rápido crescimento da importância dessas instituições é considerado como a criação de um novo sistema que na década de 1830, é chamado pela primeira vez de *Industrialismo*. Em parte, isso é o reconhecimento de uma série de mudanças técnicas muito importantes e de seu efeito transformador nos métodos de produção. É também, no entanto, um reconhecimento do efeito dessas mudanças na sociedade como um todo, que, com isso, é igualmente transformada.

Esta transformação de atributos pessoais (e também de processos) em substantivos ocorreu de maneira muito semelhante na Matemática. Otte, seguindo Marx, chamou este processo de “objetivação de habilidades subjetivas” (1994), que Marx (1978) e Mumford (1934, p. 9) mostraram que ocorreu também na produção, pois a passagem da manufatura para a grande indústria resultou na transferência para a máquina de atividades que antes

eram feitas pelo sujeito. Com essa transformação, aquilo que na manufatura exigia a ferramenta e um sujeito para realizá-la, na indústria passou a ser feito por meio de operações mecânicas e independentes da presença física do sujeito, que passou a ter o papel de supervisionar e dirigir o mecanismo.

Foucault (2007, p. 346) expressa ideias semelhantes ao abordar as profundas transformações ocorridas nas ciências, na virada do século XVIII para o XIX:

O saber, em sua positividade, muda de natureza e de forma... Nem seria mais exato imaginar que a gramática geral tornou-se filologia, a história natural, biologia, e a análise das riquezas, economia política, porque todos esses modos de conhecimento retificaram seus métodos, se acercaram mais de perto do seu objeto, racionalizaram seus conceitos, escolheram melhores modelos de formalização — em suma, porque se teriam desprendido de sua pré-história por uma espécie de auto-análise da própria razão. O que mudou, na curva do século, e sofreu uma alteração irreparável foi o próprio saber como modo de ser prévio e indiviso entre o sujeito que conhece e o objeto do conhecimento.

Difícil descrever em melhores palavras as transformações pelas quais também a matemática passou, e assim transformou-se, no século XIX, em Matemática Pura, que tem pouco em comum com a matemática anterior ao século XIX.

É nesse contexto que deve ser compreendida a crítica de Bolzano a Kant, e sua leitura de que a herança deste último tenha sido “terrível” (1976). Kant havia afirmado, em sua *Crítica da Razão Pura*, publicada pela primeira vez em 1781, que espaço e tempo são “formas puras da intuição sensível”, “princípios da sensibilidade *a priori*”, “princípios do conhecimento *a priori*” (A 21/B 35); que a Matemática continha essencialmente juízos sintéticos, e que seus objetos seriam construtíveis na intuição por meio das formas puras *a priori*.

Segundo esta concepção, os conhecimentos analíticos seriam baseados na lei da contradição, e Kant julgou que a aplicação desta lei pressupunha que as proposições se referem a objetos (ver Kant, A 594/B 622), não se preocupando com as proposições em si mesmas. Desse ponto de vista, na matemática, todo juízo analítico deveria ser baseado num juízo sintético, e os axiomas, em particular, seriam todos sintéticos.

Bolzano concordou com estas conclusões de Kant, com exceção do envolvimento da intuição e do papel das proposições (que distinguiu radicalmente de juízos) na formação

do conhecimento. Para Bolzano, a matemática é essencialmente uma ciência de conceitos, e ele percebeu que Kant manteve o foco da epistemologia no sujeito, o que não ajudava a diferenciar o conhecimento da sua representação, nem a eliminar os conceitos de espaço e de tempo dos fundamentos do cálculo.

Mas, afinal, que características eram essas, que tornaram a matemática do século XIX um saber completamente diferente da matemática dos séculos anteriores? Antes do século XIX, a atividade matemática consistia, principalmente, em procurar métodos mais poderosos para resolver problemas externos a ela – a maioria deles referentes à mecânica e à astronomia – e em procurar novas aplicações. Os números eram vistos como maneiras de expressar quantidades ou da medida de grandezas⁸. Pelo menos até 1780, não havia maiores preocupações dos matemáticos em explicar a natureza do cálculo, e publicações que abordassem tal questão quase não eram encontradas em periódicos científicos. Entre 1780 e 1800, verifica-se um pequeno, e pouco significativo, aumento do número de tais publicações (GARBINER, 1981, p. 23); nesse período, a solução dos problemas de fundamentos da matemática se tornou incontornável, e os matemáticos começaram a perceber, já com Lagrange (1736-1813), a necessidade de eliminar das suas demonstrações analíticas o uso dos conceitos de espaço e de tempo, e o recurso à visualização de propriedades geométricas (cf. BOYER, 1949) nas demonstrações.

Mas foi no início do século XIX que os matemáticos passaram a ter a consciência de que a fundamentação adequada da Matemática era uma exigência para a própria evolução e continuidade da mesma, e a questão tomou uma forma completamente nova.

Bolzano foi o primeiro a expressar esta tendência com clareza e consciência histórica, pois não apenas tinha uma sólida formação matemática, como também compreendia as questões filosóficas que estavam em jogo, que diziam respeito à natureza do conhecimento, da forma de representá-lo e da necessidade de considerar os objetos matemáticos como conceitos independentes de suas representações particulares ou de sua aplicação.

Nenhum dos grandes matemáticos de sua época compreendeu como ele a relação entre os diferentes problemas de fundamentos e os abordou como uma questão mais geral, nem a necessidade de realizar um plano de reorganização completa da matemática, por meio da eliminação dos conceitos de espaço e de tempo e de analogias com a natureza ou

⁸ O próprio Bolzano ainda utilizava o termo *Größe* (grandeza).

recursos metafísicos do cálculo diferencial e integral; de considerar a geometria como uma área particular da Matemática cujas afirmações deveriam ser provadas por meios analíticos e aritméticos; e passar a considerar a aritmética como a parte mais geral da Matemática (ver Bolzano, 1905/2004). E foi assim que a Matemática ganhou sua “independência” das outras ciências, deixando de ser o estudo das grandezas, medidas, cálculos, muitas vezes em função de outras ciências, para tornar-se um conhecimento cujos conceitos não se referem a objetos físicos ou a atividades, mas que tem seus objetos próprios: funções, derivadas, integrais, séries, sequências, conjuntos, etc. E foi assim também que a ideia de uma lógica pura e de uma filosofia da linguagem ganharam força.

E, nesse processo, ocorreu uma nova mudança. O centro da atividade matemática passou a ser a noção de prova rigorosa de suas próprias afirmações: o procedimento usado por Bolzano no RB (1905/2004) – que consistia em provar algo intuitivo, óbvio, usando conceitos analíticos e a linguagem aritmética, “num processo em que o discreto (numérico) ‘explica’ o contínuo (geométrico)” (CLÍMACO, 2008, p. 10) – viria a se tornar, ao longo do século XIX, o padrão de toda a matemática, enquanto no século XVIII os matemáticos, ou não achavam que precisavam provar tais resultados, ou utilizavam conceitos alheios ao cálculo para tentar demonstrá-los.

Os ideais de Bolzano de reorganizar a matemática numa cadeia dedutiva de afirmações hierarquicamente organizadas de acordo com a analiticidade de suas afirmações seriam realizados com as obras dos grandes matemáticos alemães da segunda metade do século XIX, como Weierstrass, Dedekind (1831-1916) e Cantor. Com eles, os conceitos matemáticos que expressavam variação de fenômenos físicos, químicos e biológicos passaram a ser considerados objetos próprios da matemática e definidos de maneira “puramente analítica”, e o centro da atividade matemática passou a ser as demonstrações e a exploração das características dos novos conceitos e objetos matemáticos. E “provas rigorosas”, a partir do século XIX, passaram a significar demonstrações analíticas, que não usem geometria, nem espaço, nem tempo, e sim a linguagem aritmética, a lógica e, progressivamente, a teoria dos conjuntos.

E foi assim que a Matemática, como havia ocorrido com a indústria e a democracia, tornou-se uma instituição social, e suas demonstrações passaram a ser consideradas como parte de um sistema hierárquico de proposições, como algo comunicável para comunidades cada vez mais amplas, ao invés de algo que somente fornecesse certeza e convicção de uma pequena quantidade de especialistas. E foi assim que a mudança nos fundamentos da

matemática impulsionou uma transformação maior da filosofia, com a semântica e a linguagem tomando o lugar da epistemologia, e o desenvolvimento da lógica voltando para o centro da atividade filosófica.

O paradoxo pedagógico que surgiu consiste em que, criado com finalidades didáticas e para facilitar a comunicação, a linguagem analítica e as demonstrações rigorosas distanciaram a tal ponto a linguagem Matemática da linguagem natural e do senso-comum, que se tornaram algumas das maiores dificuldades encontradas pelos professores de Matemática da atualidade em ensinar a disciplina (sobre isso, ver, por exemplo, Hanna, 2000).

Ficou claro, a partir do exposto, que as transformações que ocorreram na matemática fazem parte de uma transformação maior ocorrida em toda a sociedade, e que a própria “profissionalização” a que se refere Dias (2008, 2010) se insere no contexto das transformações sociais da época, em particular da ampliação dos sistemas de ensino. Mais do que a expressão da vontade de profissionais ou sociedades científicas para se separar do senso comum, tais transformações constituíram um passo necessário da matemática para que ela aumentasse sua capacidade de generalização, bem como para o início de sua difusão em larga escala, que seria impensável se ela tivesse permanecido prisioneira da aplicação a outras ciências ou ao uso cotidiano que se faz dela. Por outro lado, sem essa generalização, não teria sido possível que surgisse, a partir do século XIX, uma nova gama de aplicações nas ciências naturais, nas aplicadas e na indústria.

Não se pretende negar que tenha havido, nesse processo em que a matemática adquiriu sua “independência” e formou seus próprios conceitos, , uma tendência dos matemáticos a acreditar numa espécie de a-historicidade da matemática, que supostamente seria a única área do conhecimento totalmente pura (ver, por exemplo, Dieudonné, 1990, p. 43).

Embora este não seja o objetivo deste artigo, acredita-se que também foi refutada qualquer visão a-histórica da matemática, na medida em que demonstrou-se que a criação da matemática pura foi parte de um processo histórico muito mais amplo, parte da transformação da própria cultura.

E, de fato, um dos papéis mais importantes da “Filosofia da Educação Matemática” é mostrar que o desenvolvimento da matemática não se dá sem influenciar e sem ser influenciado pelas grandes transformações por que passa a sociedade.

No entanto, não é reduzindo artificialmente a importância das conquistas da matemática pura a supostos interesses de especialistas, de povos opressores ou políticos, que se conseguirá retomar as relações da matemática com suas origens; assim como não é reduzindo a matemática escolar ao que é intuitivo, cotidiano, ou ao que aparentemente tem significado para o aluno, que se conseguirá ajudar as crianças a compreenderem as grandes conquistas que a Matemática realizou, como parte do desenvolvimento da sociedade e da cultura.

Não apenas a matemática, mas todo conhecimento formal precisa necessariamente tomar certa distância do senso comum para tornar-se ciência; e a matemática é um ramo do conhecimento em que esta distância é maior, e que nos últimos anos também tem estado sob a mira de reformadores de currículo que, em nome do respeito ao conhecimento cotidiano ou cultural da criança, defendem que a Matemática não seja ensinada em sua dimensão abstrata. Mas, se a distância do senso-comum for justificativa aceita para reduzir alguma disciplina do currículo, nenhum saber geral e abstrato poderá permanecer na escola, o que significaria o total esvaziamento de seus objetivos.

E a obra de Bolzano mostra, inclusive, que a aritmetização esteve ligada, por suas origens, à busca iluminista por justiça e contra toda forma de arbitrariedade.

Referências bibliográficas:

ÁVILA, Geraldo. **Introdução à análise matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

BACON, Francis. **Novum Organum** (Os Pensadores). Tradução de José A. R. de Andrade. São Paulo: Nova Cultural, 2005.

BOLZANO, Bernard. **Selbstbiographie**; In: *Ausgewählte Schriften*, dir. Winter, Eduard. Berlin: Union, 1976.

_____. **Las paradojas del infinito**. México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias/UNAM, 1991.

_____. **Paradoxien des Unendlichen**. Leipzig: Felix Meiner, 1851.

_____. **Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege**. Praga: Gottlob Hass. Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, Leipzig, v. 153, p. 343-395, 1905.

____. **Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign, there lies at least one real root of the equation.** In: RUSS, S. *The mathematical works of Bernard Bolzano*. Oxford: OUP, 2004.

____. **Bernard Bolzano-Gesamtausgabe** . Reihe 1. Schriften. Band 18. Mathematisch-physikalische und phylosophische Schriften, Winter E., Berg, J., Kambartel, et al. Stuttgart : F. Frommann, 1989.

____. **Wissenschaftslehre**, 4 vol. Sulzbach: Wolfgan Schultz. Reprint Scientia Verlag Aalen, 1981.

BOYER, C. B. **The history of the calculus and its conceptual development**. New York: Dover, 1949.

CAVAILLÈS, Jean. **Obras completas de Filosofia da Ciência**. Rio de Janeiro: Forense, 2012.

CLÍMACO, Humberto de Assis . **Geometria e Aritmetização da Grécia Antiga à Matemática Moderna**. Seminário Nacional de História da Matemática, v. 1, p. 111-122, 2011.

____. **Prova, Explicação e Intuição em Bernard Bolzano**. In: Encontro Brasileiro de Pós Graduação em Educação Matemática, 2008, Rio Claro/SP. XII Encontro Brasileiro de Pós Graduação em Educação Matemática, 2008.

____. **Prova e Explicação em Bernard Bolzano**. 2007a. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá.

____. **Sobre a interface entre conceito e intuição na noção de explicação matemática**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte - MG. IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007b.

CLÍMACO, Humberto de Assis ; OTTE, Michael. **Bernard Bolzano: o conceitualismo e a intuição na Educação Matemática**. Revista de Educação Publica (UFMT), v. 19, p. 165-180, 2010.

DESCARTES, René. **Meditações** (OsPensadores). São Paulo : Abril Cultural, 1983.

DIAS, André Luís Mattedi et al. **A institucionalização da matemática moderna nos currículos escolares ou a hegemonia da cultura matemática científica nas escolas**. In: ESOCITE VIII - Jornadas Latinoamericanas de Estudios Sociales de la Ciencia y la Tecnología, Buenos Aires, 2010, p. 1-19.

DIAS, André Luís Mattedi. **O movimento da matemática moderna: uma rede internacional científica-pedagógica no período da Guerra Fria**. In: Jornadas Latinoamericanas de estudos sociais das ciências e das tecnologias, ESOCITE, VII. Rio de Janeiro: Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, 2008.

DIEUDONNÉ, Jean. **A formação da matemática contemporânea**. Tradução de J. H. H. Perez. Lisboa: Dom Quixote, 1990.

DUGAC, Pierre. **Eléments d'analyse de Karl Weierstrass**. In: Archive for History of Exact Sciences 10, 41-176, 1972.

_____. **Histoire du theorem des accroissements finis**. In: Archives nternationles d'Hhistoire des Sciences 30, 86-101, 1980.

FOUCAULT, Michel. **As Palavras e as Coisas**. Tradução de Salma Tannus Muchail. 9ª Edição. Martins Fontes: São Paulo, 2007.

FREUDENTHAL, Hans. **Did Cauchy plagiarize Bolzano?** Archive for History of Exact Sciences 18. XI, Volume 7, Issue 5, pp 375-392, sede da revista desconhecida, 1971.

GRABINER, Judith V. **The origins of Cauchy's rigorous calculus**. Cambridge e Massachusetts: editor do The Massachusetts Institute of Technology, 1981.

HANNA, Gilla. **Proof, explanation and exploration: an overview**. *Educational Studies in Mathematics* (EMS), v. 44, p. 5-23. Dordrecht: 2000.

HYKSOVA, Magdalena. **Karel Rychlík and Bernard Bolzano**. Seminários sobre questões filosóficas relacionadas à Matemática e à Física. Praga: Prometeu, 2000.

IEZZI, Gelson, MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar: Conjuntos e Funções**. São Paulo: Atual, 2005.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. 5. ed. Tradução de M. P. Santos; A. F. Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

KNEALE, William; KNEALE, Marta. **O desenvolvimento da lógica**. Tradução de M. S. Lourenço. 3. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

LAPOINTE, Sandra. Bernard Bolzano: contexte et actualité. In:_____. **Bernard Bolzano: philosophie de la logique et théorie de la connaissance**. Philosophique v. 31, p. 3-17. Printemps: 2003.

MARX, Karl. Para a crítica da economia política. In:_____. **Manuscritos econômico-filosóficos e outros textos escolhidos**. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

MUMFORD, Lewis. **Technics and Civilization**. Nova Iorque: Harcourt, 1934.

NEWTON, Isaac. **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**, 3; ed. Tradução para o inglês de Bernard Cohen e Anne Whitman's. Califórnia: Universidade da Califórnia, 1999.

OTTE, Michael. **Das Formale, das Soziale und das Subjektive: Eine Einführung in die Philosophie und die Didaktik der Mathematik**. Frankfurt: Suhrkamp, 1994.

PORTA, M. A. G. Platonismo e intencionalidad - I: a propósito de Bernhard Bolzano. Primeira Parte. **Síntese**, Belo Horizonte, v. 29, n.94, p. 251-275, 2002.

_____. Platonismo e intencionalidad - II: a propósito de Bernhard Bolzano. **Síntese**, Belo Horizonte, v. 30, n.96, p. 85-106, 2003.

_____. A polêmica em torno ao psicologismo de Bolzano a Heidegger. **Síntese**, Belo Horizonte, v. 31, n.99, p. 107-131, 2004.

RUSNOCK, Paul: Bolzano and the traditions of analysis. In: KÜNNE, W.; SIEBEL, M.; TEXTOR, M. **Grazer Philosophische Studien**, n. 53, p. 61-85, 1997.

RUSS, S. **The mathematical works of Bernard Bolzano**. Oxford: OUP, 2004.

SCHUBRING, Gert. Bernard Bolzano: Not as Unknown to His Contemporaries as is Commonly Believed? **Historia Mathematica**, v. 20, 45–53, 1993.

_____. **Conflicts Between Generalization: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century**. Nova Iorque: Springer, 2004.

SKED, Alan. **Declínio e Queda do Império Habsburgo: 1815-1918**. Lisboa: Edições 70, 2008.

SINACEUR, H. Cauchy et Bolzano. **Revue d'Histoire des Sciences**, v. 26, 87–112, local de publicação e editora desconhecidos, 1973.

STRUIK, Dirk. **História Concisa das Matemáticas**. Tradução de João Guerreiro. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1989.

SUNDHOLM, B. Göran. When, and why, did Frege read Bolzano? **Logica Yearbook**, 164-174, 2000.

TWARDOWSKI, Kasimir. **On the Content and Object of Representation: A psychological investigation**. Tradução para o inglês de R. Grossmann. Haia: Martinus Nijhoff, 1977.

WALDEGG, Guillermina. Bolzano's Approach to the Paradoxes of Infinity: Implications for Teaching. **Science & Education**, v. 14, p. 559–577. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2005.

WILLIAMS, Raymond. **Cultura e Sociedade: de Coleridge a Orwell**. Petrópolis: Vozes, 2011.

WOODRUFF, Smith David. **Husserl**. Londres-Nova Iorque: Routledge, 2007.