# ARGUMENTAÇÃO E PROVA NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA: *DESIGN* COLABORATIVO DE CENÁRIOS DE APRENDIZAGEM

**JAHN,** Ana Paula – UNIBAN
**HEALY,** Lulu – UNIBAN
**GT-19:** Educação Matemática
**Agência Financiadora:** CNPq

## 1. INTRODUÇÃO

Inúmeras pesquisas no campo da Educação Matemática têm apontado a complexidade associada ao ensino e aprendizagem da argumentação e prova em Matemática, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000; Harel e Sowder, 1998; Pietropaolo, 2005). Esses estudos evidenciam não apenas dificuldades dos alunos em compreender e construir argumentos matemáticos válidos, como também a carência de culturas de práticas pedagógicas relacionadas ao tema, particularmente entre professores do Ensino Fundamental e Médio. Knuth (2002) descreve a tendência de professores de Matemática em considerar a prova como um procedimento pedagógico limitado e não como uma forma de fazer matemática ou um meio de se comunicar matematicamente.

Os currículos de vários países indicam a necessidade de abordagens inovadoras que envolvam os alunos em todas as etapas do processo de prova, incluindo elaboração de conjecturas, investigações empíricas, identificação de propriedades matemáticas e encadeamento de passos dedutivos. Nesta direção, muitos pesquisadores têm investigado o potencial de ambientes computacionais para servir de contexto de aprendizagem da prova, no qual os alunos possam engajar-se na definição e construção de classes de objetos matemáticos (baseados na explicitação de propriedades) e também explorar inúmeros exemplos específicos dessas classes em suas tentativas de identificar e provar certas relações (Mariotti, 2001; Healy e Hoyles, 2001; Govender e De Villiers, 2004; Vaz, 2004).

Em tese, os cenários de aprendizagem apresentados nestas pesquisas poderiam servir como fonte de recursos pedagógicos a serem utilizados em salas de aula do mundo todo. No entanto, é preciso considerar que uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática não depende apenas de situações de aprendizagem inovadoras, explorando novos contextos e novas ferramentas, mas exige também a aceitação e apropriação delas pelos professores. A compreensão desse processo de apropriação por parte dos professores é o objetivo central do nosso estudo.

Assim, desenvolvemos um projeto de pesquisa ao longo de dois anos buscando caracterizar uma colaboração entre pesquisadores e professores de Matemática. De forma resumida, podemos dizer que foram implementadas duas atividades de pesquisa: 1) um levantamento dos conhecimentos e habilidades de alunos em relação a tarefas de argumentação e prova; 2) o *design* de cenários de aprendizagem tendo como ponto de partida o mapeamento anteriormente elaborado. Neste artigo, descrevemos as principais etapas e resultados dessa segunda atividade.

## 2. O ESTUDO

O projeto de pesquisa teve como principais objetivos:

1. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para: (a) levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes de escolas do estado da São Paulo; (b) elaborar situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados;
2. Investigar em que medida participação desses professores nos grupos colaborativos contribui para apropriação de novas perspectivas sobre o ensino e aprendizagem de prova.

A equipe do projeto foi composta de 7 pesquisadores e 27 professores de Matemática, cursando um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Todos esses professores atuavam na rede pública do estado de São Paulo, nos níveis Fundamental e/ou Médio.

Desde o início do projeto, foi criado um espaço virtual para apoio ao trabalho presencial, facilitando as comunicações entre os membros da equipe e o compartilhamento das decisões e ações. Esse espaço virtual foi hospedado na plataforma TelEduc[1], sendo seu gerenciamento sob a responsabilidade dos pesquisadores. As ferramentas utilizadas neste ambiente incluíram principalmente Agenda, Fórum, Portfólio, Material de apoio, Leituras e Correio.

---

[1] Para mais detalhes, acessar http://teleduc.nied.unicamp.br/teleduc/ (último acesso em 9/4/2008).

Como já mencionado, a primeira fase (Fase 1) centrou-se no mapeamento de concepções de alunos sobre prova (faixa etária 14-16 anos), assim como em um levantamento de experiências e crenças de professores envolvendo seu ensino. Na Fase 2, o foco foi na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem, integrando recursos digitais. Na seqüência, concentramos nossa discussão somente nesta segunda fase, analisando a participação dos professores no processo de *design* e na natureza das situações desenvolvidas.

## 2.1. Desenvolvimento das atividades da segunda fase do projeto

A segunda fase envolveu a equipe na elaboração de situações de aprendizagem. Esta fase buscou contemplar dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. O eixo da aprendizagem teve como objetivo principal a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas na Fase 1 do projeto. No eixo relativo ao ensino, a atenção recaiu sobre o professor, mais especificamente em sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que seriam propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia adotada incluiu diversos elementos associados a *design-based research* (Cobb et al., 2003). Os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia utilizada para essa fase buscou um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores. Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguiu um ciclo a partir da organização de 5 grupos com 4 a 7 professores e 2 pesquisadores cada um.

Os grupos ficaram responsáveis pelo desenvolvimento de situações de aprendizagem, integrando ferramenta computacional. O uso de dois tipos de ferramentas – ambiente de geometria dinâmica e planilha eletrônica – havia sido previsto por serem familiares ao grupo de professores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Entretanto, os grupos tiveram a liberdade de selecionar e incluir outras ferramentas que julgassem necessárias.

Para o desenvolvimento dessa fase, as atividades foram organizadas em três etapas. Na 1ª etapa, a cada um dos 5 grupos foram atribuídos dois dos temas (ou conteúdos) previamente definidos (cf. quadro abaixo).

***Ensino Fundamental***
Tema 1: Múltiplos e divisores (inclusive MDC e MMC)
Tema 2: Teorema Fundamental da Aritmética
Tema 3: Congruência, semelhança e equivalência de figuras.
Tema 4: Teorema de Pitágoras
Tema 5: Teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal e teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

***Ensino Médio***
Tema 1: Conjuntos numéricos
Tema 2: Progressões Aritméticas e Geométricas (PA e PG)
Tema 3: Funções do 1º e 2º grau
Tema 4: Geometria Espacial (paralelismo e perpendicularismo)
Tema 5: Geometria Analítica (paralelismo e perpendicularismo)

**Quadro 1: Temas escolhidos para Fase 2**

Desde as primeiras reuniões, nos diferentes grupos, foram sendo apontados inúmeros fatores que dificultariam a aplicação das atividades, pelos professores, durante as etapas iniciais de seu desenvolvimento. Primeiramente, o baixo nível de desempenho dos alunos no questionário sobre provas na primeira fase deixou os professores relativamente reticentes quanto à viabilidade de trabalhar com esse tipo de atividade. Considerando esses resultados, o ponto de partida para as experimentações não era fácil de ser identificado, gerando insegurança nos participantes. O nível de insegurança foi ainda aumentado pela demanda de integração de recursos computacionais nas situações de aprendizagem. Para a maioria dos professores, o acesso aos computadores era bastante problemático, exigindo um planejamento com grau de complexidade não previsto inicialmente. De fato, o uso de computadores não fazia parte das práticas profissionais desses professores. Nessas condições, a proposta revelou-se extremamente ambiciosa.

Os grupos reuniram-se quinzenalmente, em encontros presenciais. Nos primeiros encontros, os pesquisadores propuseram a leitura e discussão de parte de uma publicação trazendo exemplos ou tipos de atividades para o ensino de provas matemáticas (Balacheff *et al.*, s/d), a fim de fornecer algumas possibilidades para a iniciação do processo de *design*. É importante ressaltar que o trabalho desse autor serviu com referência teórica central ao longo das duas fases de projeto. Em particular na elaboração e análise do questionário (principal instrumento da Fase 1), especial atenção foi dada a sua classificação dos diferentes tipos de prova (Balacheff, 1988). Como esta classificação também foi utilizada no *design* e na análise dos cenários, consideramos pertinente apresentá-la. Nessa classificação, em relação a possíveis provas produzidas por aprendizes, Balacheff (ibid.) diferencia quatro tipos de argumentos, dividindo-os em dois grupos: *argumentos pragmáticos* e *argumentos conceituais*. Dentre os argumentos de natureza pragmática, também se pode identificar dois tipos: (1) nos argumentos do tipo *empirismo ingênuo,* a conclusão em relação à certeza de uma proposição é extraída da observação de um pequeno número de casos; (2) os *experimentos cruciais* também se centram na apresentação de evidências empíricas, mas neste caso, o aluno apresenta um exemplo escolhido especificamente para testar a validade da afirmação. O raciocínio associado a esta categoria é "se posso mostrar que é verdade neste caso, posso generalizar para todos os outros".

Nos argumentos do tipo *exemplo genérico* são realizadas operações e transformações a partir de um exemplo, mas esse exemplo é tratado como representativo ou característico de sua classe. Portanto, nestes argumentos, a validade da proposição é extraída das propriedades matemáticas do objeto em questão e não apenas das evidências empíricas. Este tipo de argumentação é visto por Balacheff (ibid.) como uma ponte entre argumentos de natureza pragmática e argumentos de natureza conceitual. O quarto tipo de prova é denominado *experimento de pensamento*. Um argumento deste tipo é considerado conceitual e nele as operações e relações utilizadas não envolvem exemplos particulares e são expressas de forma a explicitar sua generalidade. O grande desafio no ensino da prova, confirmado pelos professores nos resultados das análises do questionário aplicado na Fase 1, é justamente possibilitar a passagem de argumentos pragmáticas aos conceituais.

Voltando ao processo de *design* dos cenários de aprendizagem, as diversas versões das atividades, ao longo de seu desenvolvimento, foram disponibilizadas nos *Portfólios* dos grupos no ambiente virtual, constituindo o registro das produções em vários momentos dessa etapa, para posteriores análises. A título de complementação desses dados, as discussões durante as reuniões presenciais foram vídeo-gravadas. Além disso, todos os participantes de um dos 5 grupos foram entrevistados para obter informações sobre suas expectativas em relação à inclusão do computador em situações de aprendizagem.

A segunda etapa contemplou o compartilhamento das situações elaboradas entre os diferentes grupos, visando envolver os professores em um processo de análise e avaliação das atividades, o qual, eventualmente, levaria a reformulações das mesmas antes da aplicação em sala de aula. Nesta etapa, os grupos continuaram com encontros quinzenais, mas para facilitar a comunicação entre eles, ao ambiente virtual foi atribuído um papel mais central. Para tanto, foram abertos *Fóruns* de discussão (intitulado "Atividades em teste") referentes a cada tema e seu conjunto de atividades correspondente. No coletivo, foi decidido que o gerenciamento e mediação nesses fóruns não seriam de responsabilidade de um pesquisador, mas sim, ficaria a cargo de um professor-colaborador que participou da autoria das atividades em discussão. Ao longo desse processo, a dinâmica envolveu a realização das atividades pelos próprios professores e todos os comentários e discussões associadas eram compartilhados por meio de mensagens nos fóruns. Isso permitiu incluir mais um ciclo no *design* das atividades, caracterizada por interações mais intensas entre dois grupos – "grupo autor" e "grupo avaliador". Os registros assim gerados representam dados importantes para analisar as evoluções das atividades, bem como, dos conhecimentos pedagógicos dos professores relacionados ao conteúdo em questão.

A experimentação das atividades com alunos ficou reservada à 3ª etapa dessa segunda fase. De modo geral, estas experimentações não aconteceram de modo coletivo, e sim, sob responsabilidade de um professor-colaborador, na forma de trabalho individual orientado por um pesquisador. Esta escolha deu-se principalmente devido ao fato desses professores estarem participando do projeto no contexto de um curso de Mestrado Profissional, com suas diversas exigências, dentre elas a produção de um trabalho final individual. Em termos da coleta de dados, foi enfatizado o eixo relativo à aprendizagem dos alunos, ficando a cargo do professor a determinação dos instrumentos e procedimentos dos experimentos.

## 3. Principais resultados da Fase 2

Nesta seção, discutimos os principais resultados associados à elaboração e avaliação dos cenários de aprendizagem de prova integrando tecnologia. Apresentamos primeiramente uma síntese das características dos cenários produzidos e, na seqüência, considerações sobre as transformações por eles sofridas ao logo do processo de desenvolvimento.

### 3.1. Os cenários de aprendizagem

Ao final do processo de *design* da segunda fase, foram produzidos 13 cenários, correspondentes a alguns dos temas selecionados. Destes, 8 envolvem conteúdos do domínio da Geometria e 5 da Álgebra. A Tabela 1 apresenta um sumário dos cenários finais em relação aos temas, nível de ensino e ambientes ou recursos utilizados.

| Tema | Cenário(s) | Nível | Ambientes e recursos |
|---|---|---|---|
| Múltiplos e divisores | 1 | EF | Excel / papel e lápis |
| Teorema Fundamental da Aritmética | 0 | – | |
| Congruência, semelhança e equivalência de figuras | 5 | EF | Cabri-géomètre / papel e lápis<br>Cabri-géomètre / papel e lápis<br>Cabri-géomètre / papel e lápis / material concreta<br>Cabri-géomètre / papel e lápis / material concreto<br>Cabri-géomètre / papel e lápis / material concreto |
| Teorema de Pitágoras | 1 | EF | Cabri-géomètre / papel e lápis |
| Teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal e Teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. | 1 | EF | Cabri-géomètre |
| Conjuntos numéricos | 1 | EM | Excel / papel e lápis |
| Progressões Aritméticas e Geométricas (PA e PG) | 2 | EM | Cabri-géomètre / papel e lápis<br>Cabri-géomètre / Blog / material concreto / papel e lápis |
| Funções do 1º e 2º grau | 0 | – | |
| Geometria Espacial (paralelismo e perpendicularismo) | 1 | EM | Cabri-géomètre / papel e lápis / material concreta |
| Geometria Analítica (paralelismo e perpendicularismo) | 1 | EM | Cabri-géomètre / papel e lápis |

**Tabela 1: Os cenários de aprendizagem**

Como se observa, em termos de recursos informáticos, houve predominância do uso da geometria dinâmica. Em parte, isso reflete a preferência para cenários relacionados a Geometria, mas é interessante notar que dois cenários de Álgebra também integraram esse tipo de ambiente. Atribuímos esse amplo uso do Cabri-géomètre pelo fato deste ser um software bastante utilizado em disciplinas do curso do Mestrado Profissional ou, ainda, a sua disseminação nos cursos da formação continuada oferecidos nos últimos anos pela Secretaria Estadual de Educação de São Paulo. A tabela também mostra que, em sua maioria, os cenários compreendem ainda, além de alguma ferramenta tecnológica, outros recursos didáticos e, em particular, a articulação com atividades no papel e lápis.

O papel do software Cabri-géomètre e da planilha eletrônica Excel foi tanto para dar acesso a muitos exemplos e dados empíricos, quanto para favorecer a constituição de *exemplos genéricos* (Balacheff, 1988). Importante aqui ressaltar uma diferença entre exemplos genéricos quando apresentados em papel e lápis e exemplos genéricos construídos explicitamente no computador. No primeiro caso, a produção do exemplo não necessita a expressão de uma propriedade de forma geral, enquanto a construção de uma figura robusta no Cabri ou uma fórmula no Excel envolve o aprendiz em um processo de formalização das propriedades em jogo.

A análise dos cenários de aprendizagem produzidos ao longo do projeto mostra que, de modo geral, as atividades relacionadas ao registro ou produção do texto de uma prova foram propostas no ambiente do papel e lápis. Mesmo assim, pode-se encontrar uma diversidade nos modos de expressão esperados nestas atividades. Todas valorizam a apresentação de provas em língua natural, sendo que em alguns cenários, a estrutura das provas não é indicada, enquanto que outros especificam determinadas estruturas para organizar o encadeamento lógico dos argumentos. Esta distinção está relacionada à expectativa (ou não) da construção de provas formais – quando este tipo de argumento era esperado, o cenário sempre contou com a apresentação de sua estrutura.

Assim, podemos identificar nos cenários finais três diferentes estratégias para auxiliar a passagem de provas pragmáticas para as conceituais: (1) a produção de exemplos genéricos, facilitada pelos ambientes computacionais; (2) as oportunidades para expressar argumentos matemáticos em língua natural e (3) a explicitação de estrutura para provas formais. Outro ponto importante relacionado a esta passagem é a freqüente atribuição de papel de explicação (De Villiers, 2001) para a prova, com o intuito de motivar a transição para o nível conceitual. Esta escolha dos professores no *design* foi uma tentativa de mostrar as limitações dos argumentos empíricos, incitando os alunos a explicarem o porquê da validade e não se restringirem à apresentação de alguns casos válidos.

Ainda comparando os cenários, é possível delinear diferenças nas ênfases atribuídas às diferentes fases do processo de prova. Alguns cenários centram-se principalmente em atividades de exploração e conjectura, sem uma tentativa explícita de destacar uma ou mais propriedades particulares, enquanto em outros, a fase de conjectura é mais guiada, focando-se na identificação de uma seqüência de propriedades a serem utilizadas na construção de uma prova particular.

### 3.2. Algumas evoluções nos cenários

Em geral, na primeira etapa do processo de concepção das atividades, experimentações destas em sala de aula não foram realizadas, ainda que aplicações pilotos tenham sido previstas e foram encorajadas pelos pesquisadores. Em parte, os problemas de acesso a computadores nas escolas dificultaram esses testes. Mas, o acesso não foi o principal fator: a resistência de professores para se lançarem nestas experimentações deve-se à falta de segurança dos mesmos em relação à mediação nas interações dos alunos com as atividades propostas, em particular aos tipos de argumentos que poderiam (ou deveriam) ser valorizados. Podemos afirmar que se na primeira fase a atenção dos professores voltou-se para os aspectos matemáticos do que constitui uma prova, aqui são os elementos de tratamento didático que se sobressaem. Foi nesse ponto que nós, pesquisadores, percebemos que a maior dificuldade dos professores não se concentrava nas lacunas de seus conhecimentos matemáticos sobre provas, e sim na falta de familiaridade com estratégias didáticas que pudessem contribuir para estimular raciocínios dedutivos por parte de seus alunos.

Duas características das discussões na primeira etapa nos levaram a identificar isso: primeiramente, uma tendência para se envolver com mais entusiasmo em questões matemáticas, desviando-se facilmente dos aspectos didáticos. Segundo, tentativas para produzir atividades dirigidas, nas quais o aluno é levado passo a passo a uma prova particular, sem precisar refletir efetivamente sobre as propriedades matemáticas em jogo e cujo papel do professor é apenas de fornecer informações complementares que permitam ao aluno cumprir um determinado passo. Desta forma, uma visão global do que compõe o processo de prova fica comprometida. Ambas essas tendências estão ilustradas no comentário quando do desenvolvimento da atividade sobre o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) na Figura 1.

21. **Questão 16 dúvidas**

Estamos com dúvidas sobre se as condições necessárias para aplicação do TFA estão sendo respeitadas, ou seja, se os números envolvidos nessa igualdade como 2^x é um número natutal?.
2x.34.26y=39z.

1 2^x.3^4.(2.13)^y=(3.13)^z. Aplicamos o TFA em 26 e 39.

2 2^x.3^4.2^y.13^y=3^z.13^z. Aplicamos Propriedades da Potenciação

3 2^x+y.3^4.13^y=3^z.13^z. Aplicamos Propriedades da Potenciação

4 2^x+y.3^4.13^y=20.3^z.13^z. Acrescentamos o fator 20.

5 x+y=0 z=4 y=z
x=-4 y=4 z=4

No passo 1 , 2 e 3 o aluno aplica o TFA e propriedades da potenciação sem muitas dificuldade .Talvez o professor tenha que intervir no passo 4 , pois essa estratégia de acrescentar o fator 2^0 o aluno não saiba. No passo 4 para o 5 não chegamos a um consenso, pois se aplicarmos o TFA temos dúvida se 2^x+y.3^4.13^y ou 2^0.3^z.13^z são números naturais , ou se não estamos aplicando o TFA , então como justificar essa passagem ???

**Figura 1: Comentário nas discussões sobre atividade TFA**

Não contamos com outras versões dessa atividade, uma vez que ela não foi objeto de estudo e experimentação por algum professor. Mas, considerando aquelas atividades que foram discutidas nas três etapas, pode-se constatar certa mudança na postura dos professores. Quando o enfoque estava no cenário “em uso” e não na concepção de um cenário “para o uso”, as discussões didáticas não puderam mais ser evitadas. Este resultado destaca a importância de envolver os alunos desde o início da concepção do cenário, não podendo prescindir de experimentações intermediárias. Isso vem ao encontro da perspectiva de Trouche e Guin (2006) na qual a necessidade de discutir *cenários em uso* é mais produtiva para a apropriação pelos professores, do que quando baseada apenas em *cenários para o uso*.

Outro aspecto que influenciou o desenvolvimento das atividades diz respeito à integração de recurso tecnológico nos cenários. Ao longo do processo de concepção, a relação dos professores com os diferentes aplicativos mudou. Por exemplo, no caso da geometria dinâmica, na primeira etapa, as práticas de papel&lápis foram, de certa forma, transpostas para o ambiente computacional, o que era esperado. À medida que as discussões avançaram, os esquemas de uso relacionados a essa ferramenta foram ampliados, permitindo que as possibilidades dinâmicas ganhassem mais espaço. Para ilustrar essa afirmação, reproduzimos abaixo três momentos no desenvolvimento de uma atividade sobre o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. A Figura 2 apresenta a versão inicial ao final da etapa 1.

**Soma dos ângulos internos de um triângulo**

Criar os passos:

1) Desenhe um triângulo ABC usando o Cabri.
2) Pelo vértice A, trace uma reta paralela ao lado BC.
3) Nessa reta, escolha dois pontos quaisquer, D e E, em lados opostos com relação ao vértice A.
4) Meça os ângulos DAB, EAC, CBA , BCA. Que relação existe entre eles?
5) Meça o ângulo BAC.
6) Somando as medidas dos ângulos DAB com BAC e CAE, o que você conclui?
7) Agora, observando o triângulo ABC, o que você pode dizer sobre a soma dos seus ângulos internos?
8) Pelo vértice B, trace uma reta paralela ao lado AC.
9) Nessa reta, escolha dois pontos quaisquer, F e G, em lados opostos com relação ao vértice B.
10) Meça os ângulos FBA,GBC. Que relação existe entre esses ângulos e os ângulos BCA e CAB?
11) Somando as medidas dos ângulos FBA com ABC e CBG, o que você conclui?
12) Agora, observando o triângulo ABC, o que você pode dizer sobre a soma dos seus ângulos internos?
13) Usando lápis e papel, vamos tentar demonstrar, para qualquer triângulo, a conclusão que você obteve nesse exercício.

**Figura 2: Atividade “Soma dos ângulos internos do triângulo” originalmente postada no Fórum**

Como se pode observar, trata-se de uma atividade guiada, na qual o aluno é levado a traçar e construir objetos de forma a obter a configuração clássica associada à prova da referida propriedade. Em momento algum, o caráter dinâmico da configuração é explorado, limitando o papel do ambiente às operações de medida e cálculo com mais precisão. A primeira vista, a atividade não se distingue muito de seu desenvolvimento no papel&lápis. Além de não se explorar o dinamismo dos objetos na fase de conjectura, a característica dos pontos D e E (como podendo movimentar-se sobre uma reta) pode gerar configurações diferentes daquelas pretendidas, obscurecendo talvez as propriedades a serem destacadas para compor a prova. Isso foi percebido apenas em uso, na etapa 2, conforme comentário da Figura 3.

1. **Atividade: soma dos ângulos internos do triângulo**

3) Nessa reta, escolha dois pontos quaisquer, D e E, em lados opostos com relação ao vértice A.
Observação: precisamos verificar o lado correto do ponto D e ponto E, pois fizemos conforme a figura Mirtes Estela 4 10.fig (que está no portfolio da atividade da equipe 4) e não conseguimos chegar numa relação.
Após analisarmos, percebemos que precisa de uma orientação para colocar o ponto D e E nas semi-retas opostas com origem em A. Trocamos a ordem dos pontos e chegamos a relação que a soma dos ângulos é 180º.
Sugestão: Podemos fazer um outro triângulo traçando uma reta não paralela a um dos lados do triângulo para o aluno perceber que os ângulos alternos não são iguais.

**Figura 3: Comentário sobre a atividade "Soma dos ângulos internos do triângulo"**

Interessante notar que uma das professoras que fez esse comentário, também contribuiu na elaboração da 1ª versão da atividade. Durante as discussões e refletindo sobre as sugestões dadas, quando *em uso* (no caso, por outros professores), ela é incentivada a sugerir mudanças na proposta, dando mais ênfase à fase de conjectura e um papel mais ativo ao aluno (Figura 4).

3. **At.: Soma dos ângulos do triângulo**

Sugerimos a atividade para levar o aluno a conjecturar:
1)Construir um triângulo ABC e medir seus ângulos internos.
2)Traçar uma reta qualquer passando por A.
3)Medir os 2 ângulos formados pela reta e pelos 2 lados do triângulo, com vértice A.
4) Investigue em que condições esses 2 ângulos são iguais aos ângulo B e C.
5) Teste se sua resposta é válida para os outros vértices e explique porquê.

4. **At. Soma dos ângulos internos do triângulo**

Observação sobre item 5 da sugestão de atividade anterior:
6) Use suas observações para explicar porque a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º.

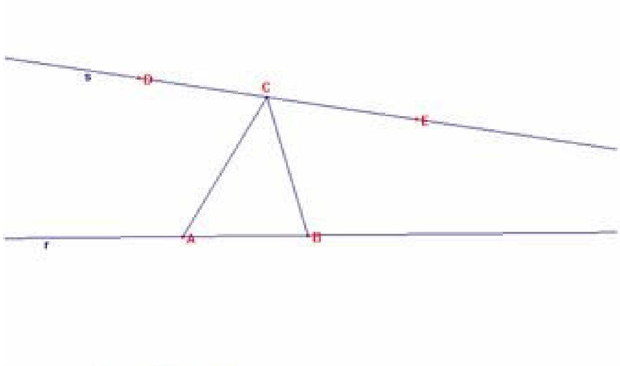
ou

6) Use suas observações para justificar se a seguinte afirmação é verdadeira ou não.
"a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre180º".

**Figura 4: Sugestões de mudanças na atividade "Soma dos ângulos internos do triângulo"**

Na versão final desta atividade (Figura 5), o objetivo é que o dinamismo do software facilite a "descoberta" da importância da relação de paralelismo, elo principal para a justificativa.

Abra o arquivo Tri.fig




1) Meça os ângulos internos do triângulo ABC.
2) Meça os ângulos ACD e BCE.
3) Manipule a reta s até ACD ficar igual a BAC.
4) Tente mexer o ponto A, B ou C de forma que as medidas dos ângulos ACD e BAC fiquem iguais. Escreva tudo o que você observa após as manipulações.
5) Use suas observações para explicar qual a relação entre reta r e reta s necessária para garantir que as medidas dos ângulos ACD e BAC fiquem iguais.
6) Delete a reta s e no seu lugar construa uma reta de tal forma que as medidas dos ângulos ACD e BAC permaneçam iguais.
7) Use suas observações para justificar se a seguinte afirmação é verdadeira ou não. "A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180".

**Figura 5: Versão final da atividade "Soma dos ângulos internos do triângulo"**

A etapa 2 representou um primeiro passo na transição entre concepção de *cenários para o uso* e *cenários em uso*, mas foi a 3ª etapa que consolidou essa transição. Com isso, as primeiras práticas didáticas, especificamente focadas no ensino de prova, começaram a ser constituídas. A emergência dessas novas práticas que desafiaram em primeira instância o professor, também perturbou os alunos, na medida em que implicou mudanças contratuais no seu papel de aprendiz. Os depoimentos que seguem contêm indícios da instalação dessas novas práticas, explicitando alguns comportamentos de professores e alunos. No primeiro, o professor Josué descreve as dificuldades associadas a essas mudanças, e no segundo, a professora Fátima reflete criticamente sobre a atividade proposta, considerando ganhos para ela e seus alunos.

> *A principal dificuldade para o aplicador foi conter-se para não dar a famosa "mãozinha", tão solicitada por esses alunos durante as atividades. Diante de grandes dificuldades em iniciar uma argumentação, esses alunos solicitavam constantemente a presença do professor. Outra dificuldade foi convencer os alunos a continuarem e persistirem em determinadas questões que deixavam para trás, por considerarem muito difícil.*

Professor Josué

> *As atividades foram mais abertas, não privilegiando uma estratégia em particular, muito pelo contrário, se nas respostas produzidas pelos alunos aparecesse uma resposta não prevista, nós nos sentíamos muito felizes, pois, esse era um indício de que eles realmente analisaram a atividade e aprenderam com ela.*
>
> Professora Fátima

A título de conclusão desta seção, resgatamos o depoimento do professor Roberto Carlos que sintetiza seu esforço para sustentar novas práticas relativas à prova na sua sala de aula, impulsionadas pela sua participação no projeto.

> *Primeira observação: antes de me referir ao tipo de argumento, fiz questão de me empenhar para que as atividades favorecessem aos alunos praticar o hábito da argumentação, já que o número de não justificativas levantados pela pesquisa na fase 1 do projeto foi expressivo; E a partir daí, posso analisar que a maioria dos argumentos, pelos critérios que utilizei, identificava propriedades pertinentes e tinha uma boa noção de como encadeá-las logicamente.*
>
> Professor Roberto Carlos

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, focamos nossa atenção em aspetos do processo de *design-colaborativo* de cenários de aprendizagem relacionados à argumentação e prova na Matemática escolar. É importante lembrar que este processo representou o segundo conjunto de atividades de um projeto de pesquisa. O primeiro envolveu os professores na concepção, aplicação e análise de um questionário sobre provas, por meio do qual foi elaborado um mapeamento das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes das escolas dos 27 professores da equipe. A participação nestas atividades de pesquisa já conduziu a certa sensibilização da parte dos professores da necessidade de construção de novas práticas referentes ao ensino da prova em suas salas de aula e também evidenciou o tamanho deste desafio. Entretanto, embora as atividades da primeira fase tenham despertado um processo de reflexão por parte dos professores, o papel de pesquisador foi essencialmente separado do papel de docente.

A Fase 2 contemplou, com a elaboração e aplicação de situações sobre prova com seus próprios alunos, o resgate deste papel. No início da segunda fase, nas discussões em grupos, identificamos certa resistência por parte dos professores em assumir o papel de docentes. Esta resistência estava associada à insegurança dos professores em efetuar práticas relativas ao ensino da prova, mas também foi reforçada pela ausência de um repertório de práticas didáticas nas quais faziam parte recursos tecnológicos. De fato, os resultados mostram que a criação de atividades visando superar as dificuldades de seus alunos revelou-se uma tarefa de alta complexidade para os professores envolvidos, e mais ainda quando aliada à proposta de integrar uma ferramenta computacional.

Como conseqüência, o processo de elaboração dos cenários durou mais tempo que o originalmente previsto e passou por duas etapas de naturezas diferentes. Na primeira atividade, a atenção dos professores concentrou-se no *design* de *cenários para uso*. Esta etapa foi caracterizada por uma tendência de se privilegiar questões de natureza epistemológica e cognitiva, em detrimento de questões didáticas. Nas reuniões, longas discussões consideraram, por exemplo, perguntas sobre os tipos de argumentos que poderiam ser considerados como prova, como avaliar a sofisticação relativa de dois argumentos diferentes e se alunos adolescentes teriam as estruturas cognitivas necessárias para lidar com provas formais.

Destas discussões emergiram as primeiras versões das atividades. Foi durante a segunda etapa do processo de elaboração, entretanto, quando os professores estavam trabalhando com *os cenários em uso* que os papéis de pesquisador e de docente foram assumidos simultaneamente e as questões didáticas ganharam a mesma atenção das relativas aos aspectos epistemológicos e cognitivos. Um resultado foi a transformação dos cenários – de atividades predominantemente direcionadas a provas particulares de uma propriedade para seqüências de atividades explorando os aspetos dinâmicos dos softwares integrados. Esta evolução permitiu efetivamente o tratamento de diferentes tipos de exemplos com o intuito de facilitar primeiramente a construção de provas pragmáticas e, em seguida, fornecer elementos com os quais os alunos pudessem contemplar as diferenças entre estas e argumentos conceituais. Dentre as três diferentes estratégias para auxiliar a passagem de provas pragmáticas para as conceituais, destacamos em particular a inclusão gradual, nos cenários dos professores, de atividades envolvendo a exploração de *exemplos genéricos* – uma idéia que eles desconheciam completamente no início do projeto. As duas outras estratégias foram relacionadas à forma de expressar argumentos matemáticos. Os professores ficaram mais conscientes de que uma apresentação formal não é a única que deve ser incentivada e, em todos os cenários, o registro em língua natural foi valorizado. Eles também reconheceram que quando provas formais são desejadas é necessário incluir atividades especificamente voltadas à introdução de estruturas visando organizar o encadeamento lógico dos argumentos.

Além da evolução dos cenários que ocorreu ao longo da Fase 2 do projeto, foi possível também observar outra evolução. Essa evolução está relacionada à natureza da participação dos professores no projeto. Sempre foi nossa pretensão de conduzir um projeto de pesquisa colaborativa. Entretanto, certas características do projeto, em particular referentes à primeira fase, não são indicativas de um trabalho verdadeiramente colaborativo. Por exemplo, o enfoque da investigação foi predeterminado pelo grupo dos pesquisadores e não emergiu de uma preocupação mútua de todos os participantes. E mais, os instrumentos associados à construção do mapa e às perspectivas teóricas que os fundamentaram foram trazidos pelos pesquisadores, pelo menos em suas primeiras versões. Talvez a atuação dos professores durante esta primeira parte do projeto seja melhor descrita como cooperativa do que como colaborativa, segundo a distinção oferecida por Boavida e Ponte (2002, p. 46): "*Operar é realizar uma operação em muitos casos relativamente simples e bem definida; é produzir determinado efeito funcionar ou fazer funcionar de acordo com um plano ou sistema";* enquanto que colaborar é *"desenvolver actividade para atingir determinados fins; é pensar, preparar, reflectir, formar, empenhar-se*". Na cooperação, as operações conjuntas podem estar todas planejadas previamente. Já na colaboração, o plano de trabalho não pode ser rígido e predefinido completamente.

De fato, as atividades de pesquisa originalmente propostas foram planejadas sem a participação dos professores. Mas, mesmo assim, vemos o planejamento cuidadoso *a priori* apenas com a intenção de sustentar uma interação efetiva entre os vários atores e um comprometimento na execução e no compartilhamento de decisões. Isso estabelecido, nosso plano de trabalho não foi rígido e entendemos que características de uma pesquisa colaborativa também emergiram no processo.

Outro aspecto utilizado para distinguir entre trabalho cooperativo e colaborativo refere-se às responsabilidades a serem assumidas por diferentes participantes. Pesquisa colaborativa envolve uma liderança compartilhada "*quando o próprio grupo define quem coordena determinada atividade, podendo haver um rodízio, nesta tarefa, entre os membros do grupo*" (Fiorentini, 2006, p. 57). Em um primeiro olhar, poderia ser difícil contemplar esse tipo de liderança compartilhada num projeto que buscou apoio financeiro e envolveu pesquisadores que foram, em algum momento, professores dos demais participantes, como foi o caso neste projeto. Entretanto, foi exatamente isso que aconteceu. Ao longo do projeto, os professores, cujos trabalhos finais de Mestrado tratavam das análises de cenários, começaram gradualmente a assumir lideranças em determinadas tarefas nas quais eles sentiam-se com mais apropriação. Como exemplo, apresentamos na Figura 6 um trecho do Fórum no qual um dos cenários foi discutido, que deixa claro que o professor Josué assumiu a responsabilidade de gerenciar a discussão sobre "suas" atividades.

13. **Atividade 1.11** — Terça, 26/09/2006, 18:01:20 — Marcos — Relevância: **Não Analisada**

Nesta atividade acho que você espera que o aluno justifique que não é possivel observando a somas dos angulos interno, mas ele respondera da mesma forma da atividade anterior pois a ideia de que o maior lado está oposto ao maior angulo.

Voltar ao topo

14. **Re: Atividade 1.11** — Domingo, 01/10/2006, 22:02:43 — Josué — Relevância: **Não Analisada**

A intenção é que o aluno perceba que num triângulo retângulo o lado maior será sempre o lado oposto ao ângulo reto. Já que os outros ângulos são sempre menores que 90.

Voltar ao topo

15. **Atividade 1.11** — Terça, 26/09/2006, 18:01:51 — Fátima — Relevância: **Não Analisada**

Creio que nessa atividade você espera que o aluno justifique que o maior lado é oposto ao maior ângulo usando a soma dos angulos internos do triangulo, até pela dica que você deu no enunciado do exercicio, mas acreditamos que os alunos apenas digam que é maior pois é oposto ao maior angulo como foi trabalhado até então .

Voltar ao topo

16. **Re: Atividade 1.11** — Domingo, 01/10/2006, 22:18:25 — Josué — Relevância: **Não Analisada**

Seu questionamento é bom e é o mesmo do Marcos , veja a resposta dada à ele. Mas quero complementar com dois exemplos de respostas que espero do aluno.
letra a) lado BC, pois é oposto ao maior ângulo desse triângulo. outra: lado BC, pois os outros dois lados são opostos a ângulos menores que 90 graus. Eu acho que entendí o questionamento de vocês, mas como disse o objetivo é que ele perceba que no triângulo retângulo a hipotenusa sempre será maior. Obrigado.

Voltar ao topo

**Figura 6: Gerenciamento da Discussão por um professor-colaborador**

É importante ainda salientar que, segundo as fases de uma pesquisa colaborativa indicadas por Fiorentini (2006, p. 55) – "concepção, planejamento, desenvolvimento e análise do estudo, chegando inclusive a co-participar do processo de escrita e autoria do relatório final" – neste projeto, apenas a primeira fase foi realizada exclusivamente pelos pesquisadores. Todas as demais, inclusive a última – elaboração do relatório final do estudo – contou com a participação e contribuições tanto dos pesquisadores quanto dos professores.

Por fim, visando contribuir com este debate sobre a metodologia da pesquisa, a riqueza deste projeto reside, no nosso entender, na diversidade dos tipos de trabalho que foram sustentados – colaborativo, cooperativo, individual – e nos diferentes papéis assumidos pelos professores ao longo do desenvolvimento das duas fases. Cada tipo e papel têm seu valor particular, sugerindo talvez que uma simples classificação – privilegiando um sobre os demais – talvez não seja o caminho mais efetivo para a compreensão de problemas relacionados à aprendizagem matemática, nem à construção de novas práticas visando supera-los.

Em síntese, podemos afirmar que nosso estudo indica que o trabalho coletivo pode contribuir para enfrentar problemas relacionados ao ensino e aprendizagem da prova, mas não todos. Dizemos isso identificando que, mesmo ao final das atividades do projeto, alguns professores permanecem duvidosos sobre as possibilidades ou viabilidade de um ensino efetivo da prova no nível da Educação Básica, no contexto atual. O depoimento do professor Roberto Carlos, avaliando o trabalho desenvolvido na segunda fase do projeto, ilustra essa posição.

> *A participação nessa segunda fase fez com que eu refletisse melhor em relação ao assunto abordado, mais especificamente, na elaboração de tarefas que levassem a condição de demonstração e prova. Percebi a necessidade de estar melhor preparado para atividade de tal cunho, e por conta disso, invisto em pesquisa que considera a argumentação como fator determinante para o tratamento positivo dessa questão. Não foram poucas as discussões sobre como possibilitar o gradativo desenvolvimento da estrutura cognitiva do aluno_ do empírico ao dedutivo _ e sinceramente, não me convence a existência dessa possibilidade pelo atual quadro de ensino da matemática. Os processos de prova e demonstração são também conteúdos matemáticos dos mais árduos e devem passar por uma criteriosa seleção afim de que se possa eleger os mais indicados a serem bem sucedidos, quando de sua exposição.*

Professor Roberto Carlos

Na óptica inversa, muitos professores, mesmo identificando a complexidade na elaboração de situações ou cenários de aprendizagem envolvendo provas, mostram-se muito encorajados (ou desafiados) a darem continuidade às práticas iniciadas no âmbito do projeto. As palavras da professora Fátima podem ser interpretadas nessa perspectiva.

> *Acredito que o maior desafio para o professor - pesquisador ou não - é mudar sua prática e seu modo de trabalho para adotar uma postura mais mediadora do conhecimento, pois para nós professores ainda "dominadores do saber", é muito difícil elaborar uma seqüência diferente do mastigado, eu dou a fórmula e meu aluno aplica, nós temos que quebrar várias barreiras, tanto na escola quanto nossas, mais por costume do que por convicção. Acredito sinceramente que elaborar uma seqüência que visa o aprendizado de maneira livre e independente, em que o aluno pensa, participa, levanta hipóteses, argumenta e descobre é trabalhoso, mas é muito REALIZADOR, tanto para o professor como para o aluno.*

Professora Fátima

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton).

BALACHEFF, N.; DEMONGEOT, M.-C.; GANDIT, M.; GARNIER, R.; HILT, D.; HOUDEBINE, J.; JUHEL, M.-A. (s/data) *Preuve et démonstration: quelques questions essentielles*. IREMs de Grenoble et Rennes, Groupement National d'equipes de Recherche en Didactique des Mathematiques. Ministère de l'Education Nationale, 109 p. Balacheff N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18: 147-176

BOAVIDA, A. M., & PONTE, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.

COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R. & SCHAUBLE, L. (2003) Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32 (I), 9-13.

DE VILLIERS, M. (2001) Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad, *Educação e Matemática*, APM, n. 62, pp. 31-36.

FIORENTINI, D. (2006). Pesquisa práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: M. C. Borba e J.L. Araujo (Orgs.) *Pesquisa qualitativa em Educação Matematica*. Belo Horizonte: Autentica.

GOVENDER, R. & DE VILLIERS, M. (2004). A dynamic approach to quadrilateral definitions. *Pythagoras,* n. 59, pp. 34-45.

HAREL, G., & SOWDER, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education.* Vol. III, pp. 234-283. Providence, RI: American Mathematical Society.

HEALY, L. & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

HEALY, L. & HOYLES C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6, pp. 235-256.

KNUTH, E. (2002) Teachers' conceptions of proof in the context of Secundary School of Mathematics. *Journal of Mathematics Teachers Education*, 5(1), pp. 61-88.

MARIOTTI A. (2001) Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6(3), pp. 283-317.

PIETROPAOLO, R. C. (2005). *(Re)Significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP.

TROUCHE, L. & GUIN, D. (2006) Des scénarios pour et par les usages. In H. Godinet, J.-P. Pernin (Eds.) *Scénariser l'enseignement et l'apprentissage, une nouvelle compétence pour le praticien.* Lyon:INRP. Disponível em: http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/math_inrp/educmath/lt-dg.pdf. Último acesso em 26/9/2007.

VAZ, R. (2004). *O uso das isometrias do software Cabri-Gèométre como recurso no processo de prova e demonstração*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP.