CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE PROVA E SEU ENSINO: MUDANÇAS E CONTRIBUIÇÕES ASSOCIADAS À PARTICIPAÇÃO EM UM PROJETO DE PESQUISA

JAHN, Ana Paula – PUC-SP – jahn@pucsp.br
HEALY, Lulu – PUC-SP – lulu@pucsp.br
PITTA COELHO[1], Sonia – PUC-SP – sonicoe@pucsp.br
GT: Educação Matemática / n.19
Agência Financiadora: CNPq[2]

1. Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validação que contrasta com a indução natural dos processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000). Os professores, por sua vez, consideram a prova como um procedimento pedagógico limitado e não como um meio de estudar Matemática ou uma forma de se comunicar matematicamente (Knuth, 2002).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, o contexto brasileiro ainda carece de um mapeamento preciso de concepções sobre provas de alunos e professores da Educação

[1] Os autores são membros do grupo de pesquisa TECMEM – *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática*, do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP.
[2] Projeto AProvaME – *Argumentação e Prova na Matemática Escolar* (processo no. 478272/2004-9).

Básica, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino, especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades de professores e alunos[3], uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados. O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem, visando possibilitar aos aprendizes o desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma das questões recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação dessa inovação pelo professor. Este artigo centra-se em aspectos relacionados a esse segundo enfoque, a partir da análise da participação de professores em um projeto de pesquisa.

2. O Estudo

O projeto de pesquisa tem como principais objetivos:

1. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para: (a) levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes de escolas do estado da São Paulo; (b) elaborar situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados;
2. Investigar em que medida participação desses professores nos grupos colaborativos contribui para apropriação de novas perspectivas sobre o ensino e aprendizagem de prova.

[3] De acordo com Artigue (1991), uma concepção está associada a um conceito e é caracterizada por três componentes: (1) um conjunto de situações que dão significado ao conceito; (2) um conjunto de significantes (imagens mentais, representações, expressões simbólicas); e (3) ferramentas (regras, algoritmos, métodos, procedimentos). Neste artigo, centramos nossa atenção nas duas primeiras componentes.

A equipe do projeto é composta de 6 pesquisadores e 27 professores de Matemática, cursando um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Com exceção de um deles, todos os demais professores atuam na rede pública do estado de São Paulo, nos níveis Fundamental e/ou Médio.

A estratégia planejada contou com um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores. O projeto pretendeu envolver os professores de Matemática participantes adotando uma metodologia de pesquisa-ação. Mais especificamente, buscou-se conduzir uma investigação co-generativa (Greenwood e Levin, 2000), um tipo de pesquisa em que os participantes e pesquisadores co-geram o conhecimento por um processo de comunicação colaborativa. Num estudo co-generativa, o significado construído no processo de investigação conduz a uma ação social, ou ainda, a reflexão sobre a ação conduz a construção de novos significados. A pesquisa-ação trata a diversidade de experiências e capacidades dentro de um grupo local, com o objetivo de resolver problemas reais do contexto em que esse grupo está inserido. No caso do projeto, a ação social em questão refere-se aos problemas no ensino e aprendizagem de provas e, particularmente, como esses problemas se manifestam e podem ser abordados nas escolas dos professores participantes.

O projeto foi organizado em duas fases, a primeira envolveu um levantamento de concepções sobre prova de alunos adolescentes (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiaram a segunda fase, a qual tem como foco a elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. No que segue, concentramos nossa atenção nas ações e análises dos resultados da primeira fase, enfocando em particular na participação dos professores-colaboradores nos processos da pesquisa.

2.1. Desenvolvimento das Atividades da Fase 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos foi um questionário aplicado à cerca de 2000 alunos do Ensino Fundamental ou Médio (14-15 anos), de escolas públicas e particulares do estado da São Paulo. Inicialmente, cada professor participante teve a incumbência de indicar 5 turmas e, a partir daí, a amostra foi determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual foi criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto. Além disso, ao longo da Fase 1, foram realizados encontros presenciais de trabalho, com freqüência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores. Nessa fase, a equipe foi dividida em 3 grupos.

A primeira atividade dos grupos foi relacionada ao desenvolvimento do questionário acima citado. Este foi elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreendeu itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretendia-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, representações simbólico-algébricas, figurais, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplam dois domínios matemáticos – o da Geometria e da Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas.

Para subsidiar o processo de adaptação do questionário de Healy e Hoyles (1998) ao contexto brasileiro, os grupos realizaram leituras e discussões de pesquisas, em particular, sobre o modelo de concepções dos tipos de prova de Balacheff (1988), o qual fundamentou a definição e escolha dos argumentos apresentados nos itens do questionário, bem como o sistema de codificação elaborado para a análise das respostas dos alunos.

Após a seleção das questões que seriam incluídas no questionário, os professores realizaram algumas aplicações piloto cujos resultados foram discutidos nos grupos. Concomitantemente, o sistema de codificação e os procedimentos para aplicação do instrumento foram sendo estabelecidos de forma colaborativa.

Uma vez definido o questionário (cf. Anexo 1), este foi aplicado pelos 27 professores a alunos de 8ª serie do Ensino Fundamental e da 1ª série de Ensino Médio. A aplicação envolveu um total de 81 turmas (34 de 8ª série e 47 do 1º ano), pertencentes a 31 escolas, sendo 22 estaduais, 3 municipais e 6 particulares. Desta aplicação resultaram 1998 protocolos, produzidos por 897 alunos de 8ª série e 1101 alunos de 1ª série do Ensino Médio, distribuídos da seguinte forma: 1604 da rede estadual, 117 da rede municipal e 277 da rede particular de ensino.

A atividade de codificação dos dados coletados foi realizada individualmente, com cada professor responsável pela organização dos dados de 3 de suas turmas, selecionadas aleatoriamente dentre as 5 indicadas. A partir da codificação dos dados, um grupo de 6 professores, por interesse pessoal, assumiu a análise detalhada das respostas, juntamente com 3 pesquisadores.

A fase seguinte do projeto (Fase 2) envolveu a equipe na elaboração de situações de aprendizagem. Esta fase buscou contemplar os dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. O eixo da aprendizagem tem como objetivo principal a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na Fase 1 acima descrita. No eixo relativo ao ensino, a atenção recai sobre o professor, mais especificamente em sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que serão propostas pelos professores em suas salas de aula. Como mencionado anteriormente, este texto é dedicado à apresentação e discussão da Fase 1 do projeto e, em particular, como a participação no desenvolvimento de um instrumento de pesquisa contribuiu no processo de transformação das perspectivas dos professores sobre o ensino e aprendizagem da prova na Educação Básica.

3. O Perfil Inicial dos Professores

Antes de iniciar o desenvolvimento do questionário, solicitou-se a cada professor a criação de seu perfil pessoal, no qual deveriam ser relatadas as experiências com provas e argumentação matemática durante seus cursos de formação. Além disso, os professores deveriam descrever uma atividade relacionada ao tema, já desenvolvida por eles em suas salas de aula. Os perfis também incluíram as respostas à versão inicial do questionário (basicamente aquele utilizado por Healy e Hoyles, 1998). Duas questões (A1 e G1) apresentavam sete respostas ou argumentos oferecidos como justificativas para uma dada afirmação. A Figura 1 apresenta os argumentos para a questão A1 e a Figura 2 aqueles fornecidos no item G1. Como parte de seu perfil inicial, foi proposto aos professores que avaliassem cada argumento, atribuindo uma nota (entre 0 e 10). Finalmente, para completar este perfil, os professores deveriam construir duas provas: uma relacionada ao domínio da Álgebra (mais especificamente, a teoria dos números), na qual tinham que provar a afirmação "*Quando se somam dois números ímpares* *quaisquer, o resultado é sempre par*". A outra prova, no contexto da Geometria Euclidiana, referia-se à afirmação "*Quando se somam os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º*".

Quando se somam dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4$ $\quad$ $4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$ $\quad$ $4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$ $\quad$ $4 + 6 = 10$

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Célia

Números pares são números que podem ser divididos por 2. Quando você soma n´meros com um fator comum, 2 neste caso, a resposta terá o mesmo fator comum.

Então Célia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

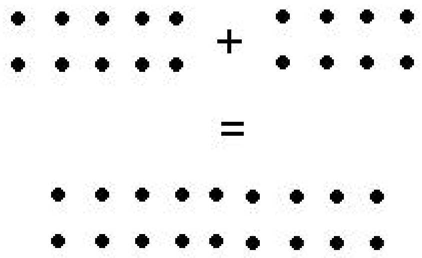
Resposta de Érica

Sejax = número inteiro qualquer
y = número inteiro qualquer

$x + y = z$
$z - y = x$
$z - x = y$
$z + z - (x + y) = x + y = 2z$

Então Érica diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

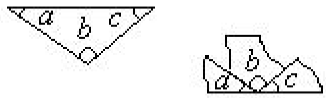
Figura 1: Argumentos apresentados na primeira versão da questão A1

Assim, os dados dessas diferentes fontes do perfil inicial forneceram informações para o levantamento de concepções dos professore sobre prova e argumentação matemática, no início do projeto.

Quando se somam os ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

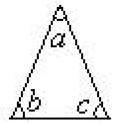
Eu recorto os ângulos e coloco juntos.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Bia

Eu desenhei um triângulo isósceles, com c igual a 65º.

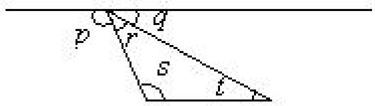


Afirmações	Justificativas
a = 180º – 2c..............	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
a = 50º........................	180º – 130º.
b = 65º	180º – (a + c)
c = d	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
∴ a + b + c = 180º.	

Então Bia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações	Justificativas
p = s..........................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
q = t	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
p + q + r = 180º..........	Ângulos numa linha reta.
∴ s + t + r = 180º	

Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

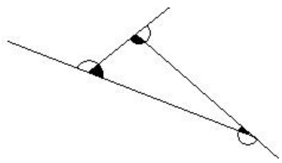
Eu medi cuidadosamente os ângulos de todos os tipos de triângulos e fiz uma tabela.

a	**b**	**c**	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180º.

Então Dario diz que a afirmação é verdadeira.

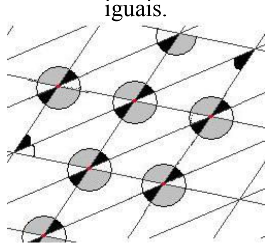
Resposta de Edu



Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo, você termina olhando o caminho por onde começou. Você deve ter girado um total de 360º.
Você pode ver que cada ângulo externo, quando somado ao ângulo interno, deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540º. 540º - 360º = 180º.
Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Fernando

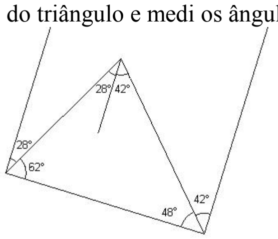
Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei ângulos iguais.



Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360º.
Então Fernando diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



(90º – 28º) + 28º + 42º + (90º – 42º) = 180º
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Figura 2: Argumentos apresentados na primeira versão da questão G1

Em termos de suas experiências com provas nos cursos de formação, uma teve unanimidade entre os professores: quando do contato deles com provas, estas eram demonstrações formais. Os dois relatos que seguem foram típicos.

Em minha formação tive apenas as demonstrações formais dos teoremas.

Amaral[4] *(Perfil inicial)*

Durante minha formação, os professores também não desenvolveram atividades sobre demonstração e provas. Apenas apresentavam as demonstrações no quadro negro.

Donato (Perfil inicial)

As descrições dos professores deixam claro que aspectos pedagógicos relacionados ao ensino-aprendizagem e considerações sobre atividades relacionadas ao tema, apropriadas para alunos da Educação Básica, aparentemente não foram contemplados em suas formações. Talvez por esta razão, mais da metade dos professores (16) não apresentou, no perfil inicial, uma atividade relacionada à prova que tenha sido desenvolvida com seus alunos. Os comentários de Fabio e Paulino servem como ilustração dos problemas enfrentados por eles.

Ainda não trabalhei com esses temas. São vários os motivos pelos quais ainda não trabalhei: falta de conhecimento amplo sobre o tema; ainda não ter incluído o tema nas minhas aulas; a não "exigência" da "instituição" em desenvolver o tema; o tema não teve grande destaque na minha formação. (não necessariamente nesta ordem)

Fabio (Perfil inicial)

Nunca trabalhei tal atividade com meus alunos, por vários motivos:

- Quando nós fazemos alguma demonstração para os alunos eles acham muito difícil, pelo motivo que eles também não estão acostumados e familiarizados com tal atividade.

- mesmo eu,como aluno, não tive esta experiência, fica então mais difícil para aplicar com os alunos.

- Em escolas particulares sempre trabalhei com sistemas de ensino (anglo), onde o tempo é curtíssimo. Já em escolas estaduais, os alunos sentem muitas dificuldades.

Paulino (Perfil inicial)

Dos outros 11 professores, apenas dois descreveram uma atividade mais detalhadamente, os demais se limitaram a citar um exemplo de teorema ou demonstração apresentada nos livros didáticos. Silvana expressou sua preocupação com esta tendência.

Para mostrar os valores dos ângulos de seno, cosseno e tangente de 30º, 45º e 60º, faço a demonstração usando os triângulos: eqüilátero (para os ângulos de 30º e 60º) e retângulo isósceles (para 45º), tanto na 8ª série do E.F. como no 2º ano do E.M. que é uma revisão. Esta demonstração consta nos livros. Nas relações métricas do triângulo retângulo quando dei aula para a 8ª série também fiz a demonstração utilizando semelhança de triângulos. A verdade é que as únicas demonstrações que eu faço com os alunos são as que estão nos livros. Preciso refletir sobre isso.

Silvana (Perfil inicial)

---

[4] Todos os nomes são fictícios visando preservar as identidades dos sujeitos participantes da pesquisa.

Em geral, os perfis sugerem que os professores não se sentem preparados para abordar provas com seus alunos. Em parte, por ser um assunto pouco enfatizado durante a formação e, em parte, porque não encontram muitas atividades nos livros didáticos por eles utilizados.

> *Normalmente não dou muita atenção para as provas e demonstrações, em minha opinião isso de deve ao fato de seguir o livro didático onde são poucas as demonstrações e provas. Durante minha formação não me recordo de atividades sobre provas e demonstrações.*
>
> *Suelen (Perfil inicial)*

Examinando a atividade de avaliação nas questões A1 e G1, podemos destacar mais informações que caracterizam algumas das concepções dos professores e, de acordo com as notas atribuídas, identificar o que constitui, para eles, uma "boa" prova.

A Tabela 1 mostra as médias das notas atribuídas aos argumentos da questão A1 (cf. Figura 1) e a Tabela 2 apresenta as mesmas informações em relação à questão G1 (cf. Figura 2).

Artur	Beth	Célia	Duda	Érica	Franklin	Hanna
10,00	6,14	8,50	7,77	4,36	5,23	6,10

Tabela 1: Média das notas atribuídas aos argumentos em A1

Amanda	Bia	Cíntia	Dario	Edu	Fernando	Hélia
9,18	5,78	9,96	6,28	7,67	7,94	7,56

Tabela 2: Média das notas atribuídas aos argumentos em G1

Os dados nas Tabelas 1 e 2 indicam que os professores dão as maiores notas para os argumentos apresentados em linguagem formal (Artur e Cíntia). As provas de Célia e Edu, que também apresentam argumentos baseados em propriedades gerais, recebem em média 8,50 e 7,67 respectivamente. Talvez a tendência em dar menor nota para o argumento de Edu ocorre porque as propriedades citadas são bem diferentes daquelas contidas em um argumento mais clássico, como o de Cíntia, por exemplo.

Os argumentos de Érica e Bia, ambos incorretos, mas apresentados formalmente, receberam as menores notas em média. Mas, é interessante observar que a média das notas para Bia é 1,4 pontos superior a de Érica. Em geral, as notas dadas aos argumentos de G1 são mais altas que as de A1, possivelmente porque os professores consideram a Geometria uma área mais difícil para seus alunos do que a Álgebra.

Os resultados que mais chamam atenção são aqueles relacionados aos argumentos baseados, de alguma forma, em evidências empíricas. O argumento de Amanda é supervalorizado pelos professores (média 9,14). Este argumento é empírico, no sentido de não utilizar propriedades geométricas para se chegar à conclusão, mas mesmo assim, recebe notas consideravelmente superiores ao argumento exaustivo de Duda e também em relação aos argumentos de Hanna e Hélia, ambos representativos de o que Balacheff (1988) denomina *exemplo genérico*, isto é, argumentos nos quais um exemplo é utilizado como representativo de uma classe. Os argumentos de Hanna e Hélia são baseados em propriedades matemáticas (corretas), mas apresentados por meio de um caso especifico e sem recurso ao registro simbólico-algébrico. Assim, é surpreendente que estes recebam notas menores que o de Amanda – e no caso de Hanna, um pouco inferiores que o argumento de Beth, um tipo de validação no nível do *empirismo ingênuo* segundo a classificação de Balacheff (idid.). Acreditamos que a valorização do argumento de Amanda esteja associada a sua familiaridade, pois este argumento aparece na maioria dos livros didáticos utilizados pelos professores-colaboradores e também é citado nos PCN de 5ª a 8ª séries (Brasil, 1998; p. 127). Ainda quanto ao argumento de Hanna, é realmente difícil entender porque ele não é considerado mais sofisticado que o de Beth.

Finalmente, consideremos as notas atribuídas às provas apresentadas "visualmente" ou envolvendo registro figural. Nossos resultados sugerem que esta forma de apresentação é pouco valorizada pelos participantes do nosso projeto, especialmente no contexto da Álgebra. Parece que o argumento de Franklin foi tratado como sendo baseado em um único exemplo, no qual a estrutura de números pares, ilustrada gráfica e visualmente, não mereceu uma nota mais alta na opinião dos professores.

Mais evidências da valorização de argumentos apresentados em linguagem formal vêm das provas construídas pelos professores na última atividade do perfil inicial. A Figura 3 apresenta uma prova típica dentre as fornecidas para a afirmação "*Quando se somam dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par*" (questão A3). Na Figura 4, por sua vez, tem-se uma resposta freqüente para provar a afirmação "*Quando se somam os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º*" (questão G3).

Minha resposta: Verdadeiro

Hip: $\begin{cases} a \text{ nº ímpar} \\ b \text{ nº ímpar} \end{cases}$ Tese : $a + b$ é um número par $\therefore$ $a + b = 2k$ com $k \in Z$/

Como a é um número ímpar, $a + 1$ é um número par $\therefore$ escrito da forma $2k$ com $k \in Z$/
Como b também é ímpar, $b + 1$ também é par $\therefore$ escrito da forma $2k'$ com $k' \in Z$/
Logo $a + 1 + b + 1 = 2k''$ com $k'' \in Z$/

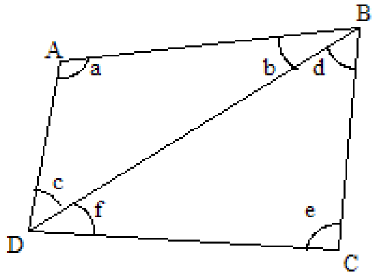
$$a + b + 2 = 2k''$$
$$(a + b) + 2 = 2k''$$
$$(a + b) = 2k'' - 2$$
$$(a + b) = 2.\underbrace{(k'' - 1)}_{\text{inteiro}} \quad \therefore \quad \text{2 divide } a + b \text{, logo } a + b \text{ é par.}$$

Figura 3: Prova apresentada por André na questão A3

Minha resposta:

Verdadeira.
Dado um quadrilátero ABCD qualquer, traçamos uma de suas diagonais dividindo em dois triângulos, um triângulo de ângulos a, b e c, outro de ângulos d, e e f, assim temos:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = a + b + c + d + e + f =$
$= (a + b + c) + (d + e + f) = 180° + 180° = 360°.$



Portanto a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360°.

Figura 4: Prova apresentada por Amaral na questão G3

Em suma, parece que as experiências dos professores antes da participação no projeto têm contribuído para uma visão na qual as provas mais desejáveis (ou as "melhores provas") são aquelas demonstrações apresentadas formalmente. Os professores não rejeitam argumentos que trazem evidências empíricas, mas nem sempre distinguem consistentemente entre argumentos que são completamente baseados em ações sobre casos especificas (Amanda, Beth e Dario, por exemplo) e argumentos que incluem alguma referência às propriedades envolvidas. A distribuição das notas indica que os professores não têm clareza sobre os diferentes papéis que os exemplos empíricos podem assumir em um processo de prova. Eles valorizam a "mostração" de Amanda provavelmente por sua familiaridade, ou talvez, pelo fato deste argumento representar as medidas dos ângulos por letras (*a*, *b* e *c*) e não numericamente, indicando medidas específicas. Assim, é possível que este argumento tenha sido considerado pelos professores como mais geral do que realmente é.

As notas dadas pelos professores indicam ainda que eles não interpretam, em termos didáticos, *exemplos genéricos* como uma possível transição entre provas pragmáticas e conceituais, como proposto por Balacheff (1999). Ao contrário, as evidências sugerem que, para os professores, existe uma lacuna entre, de um lado, as provas formais, vistas como inacessíveis a seus alunos, e de outro, os argumentos baseados em casos específicos, bastante convincentes, mas que não fornecem elementos para uma aproximação com as demonstrações. É justamente esta lacuna a principal dificuldade no ensino de provas.

3.2. Adaptação do Questionário e Criação de um Sistema de Codificação

O processo da adaptação da versão inicial do questionário passou por várias etapas. Como descrito anteriormente, várias leituras[5] foram disponibilizadas para informar os professores sobre resultados de pesquisas anteriores na área, visando familiarizá-los com os tipos de argumentos produzidos por alunos em diferentes momentos de suas trajetórias e para engajá-los no debate sobre possíveis interpretações de uma argumentação matemática, prova ou demonstração no campo da Educação Matemática. Os professores expressaram algumas dificuldades nas leituras iniciais destes textos, considerando-as difíceis. Notamos, em particular, dificuldades em compreender e aplicar plenamente a classificação de Balacheff (1988). Mas, a necessidade de criarem um instrumento de pesquisa para uso com seus alunos, representou uma razão concreta para aprofundar essa compreensão. Esta necessidade manifestou-se primeiramente na adaptação do questionário. As questões A1 e G1 apresentavam 7 argumentos. A lógica foi ter um argumento do tipo *empirismo ingênuo* (Beth em A1 e Dario para G1, por exemplo) e dois argumentos válidos que poderiam ser classificados como *experimentos de pensamento*, mas apresentados de diferentes formas (em língua natural como Célia em A1 e Edu em G1; em registro simbólico-algébrico como o de Arthur em A1 e o de Cíntia em G1).

Houve assim a proposta dos pesquisadores, aceitas pelos professores, de reduzir o número de argumentos, limitando-os a cinco. Desta forma, dois argumentos deveriam ser excluídos e alguns encontros ou momentos foram dedicados a essa tarefa. Novamente, em conformidade com as escolhas dos professores analisadas na seção anterior, as polêmicas continuaram em relação aos *exemplos genéricos*, especialmente aqueles apresentados visualmente (figurais). Após discussões, os professores decidiram eliminar os argumentos incorretos na tentativa de evitar comportamentos contratuais por parte dos alunos; o argumento de Célia em A1 (cf. Figura 1) por ser muito parecido (mesmo tipo de raciocínio) com o de Arthur e o de Hanna; e também o argumento de Fernando em G1 (cf. Figura 2), com componente figurativa. Cabe salientar que os

[5] Balacheff (1988), Healy e Hoyles (2000), Pietropaolo (2005), entre outras.

pesquisadores argumentaram bastante em favor dos *exemplos genéricos*, rediscutindo sua natureza sempre que possível. Alguns professores apoiaram essa posição a partir do momento que estabeleceram uma comparação desses exemplos com os argumentos formais, identificando neles certas propriedades que, embora sejam evocadas para um exemplo específico, têm caráter geral, podendo servir a qualquer outro caso.

Na seqüência, três outras questões abertas (para a produção de provas pelos alunos) foram selecionadas pelos professores para compor o questionário: uma de Álgebra inspirada da pesquisa de Küchemann e Hoyles, (2000-2002) e duas de Geometria propostas por um dos pesquisadores da equipe, ambas envolvendo apreensões perceptivas e operatórias de representações figurais (Duval, 1999).

Durante a elaboração do questionário, os professores-colaboradores realizaram aplicações do referido instrumento, com alguns de seus alunos de 15-16 anos. Essas aplicações – denominadas "pilotos" – tinham por objetivo não somente subsidiar a elaboração dos enunciados das questões, como também a definição dos critérios para correção ou codificação das respostas dadas pelos alunos, visando o mapeamento das concepções. Mais uma vez, partiu-se de uma codificação inspirada dos estudos de Healy e Hoyles (2000), que foi paulatinamente complementada e ampliada, em particular devido às especificidades de questões acrescidas ao questionário (como por exemplo, A5, G4 e G5).

Nos encontros presenciais, pelo menos um professor-colaborador fornecia alguns questionários respondidos que se tornavam objetos de estudo do grupo. Munidos desses protocolos, os professores intensificaram as discussões nas reuniões e também nas interações a distância no ambiente virtual.

Assim como na 1ª atividade sobre o questionário (relatada na seção anterior), nem sempre havia consenso entre os professores-colaboradores e os critérios não eram compreendidos da mesma maneira por todos. Num primeiro momento, alguns professores insistiam em considerar corretas apenas as provas formais e, do ponto de vista da codificação, resistiam em concordar com classificações intermediárias, quando não se tratava desse tipo de prova.

Com base nas intervenções e depoimentos dos professores, podemos afirmar que esta atividade – relativa à análise e codificação de respostas de alunos – caracterizou um ambiente muito favorável à apropriação coletiva das principais idéias e conceitos abordados nas leituras inicialmente realizadas, com destaque para a compreensão dos tipos de prova de Balacheff (1988). De fato, a dinâmica permitiu a vários professores ampliarem suas considerações sobre situações de prova e argumentação, não se restringindo a provas formais (ou demonstrações) e adotando uma perspectiva mais educacional. É o que ilustram as participações de dois professores no fórum destinado à discussão da codificação de uma resposta de aluno à questão G3[6] (cf. Figuras 5a e 5b abaixo).

Título	Autor	Data
Re: Como classificar?	Antenor	29/10

Mensagem
Houve : Habilidade em visão espacial (decomposição em triângulos) Mobilização correta de conhecimentos anteriores (teorema dos ângulos internos) Verificação e investigação em exemplos dados (quatro figuras) Fomulação de um algoritmo forte para suas justificativas. Entendo que o aluno apresenta maturidade em sua resposta, e incentivar o que já é bom é também tarefa do educador, desse modo classifico a resposta como 3.

Figura 5a: Participação de Antenor no Fórum de discussão sobre a codificação de G3

Título	Autor
Re: Como classificar?	Lourenco

Mensagem
O aluno sem estar preparado para esse teste suroresa: -Foi capaz de explicitar seu pensamento em lingua natural - Foi capaz de buscar exemplos "fortes" para comprovar o que havia escrito com casos diferentes Classificaria como 3, pois não acho que falta mais nada a ser explicado por um aluno

Figura 5b: Participação de Lourenço no Fórum de discussão sobre a codificação de G3

Na análise dos perfis, vimos como os argumentos do tipo *exemplo genérico* (Balacheff, 1988) não foram valorizados pela maioria dos professores no momento inicial, sendo praticamente avaliados como um *empirismo ingênuo*, análogo à resposta de Beth na questão A1. A partir das discussões sobre os resultados dos questionários pilotos, pode-se observar uma certa mudança nesse tipo de comportamento. Os professores passaram a analisar os conteúdos das provas admitindo que estes podem ser expressos de diferentes formas e relacionando-os mais efetivamente ao nível de ensino implicado.

O argumento de Duda na questão A1 também foi objeto de discussão, considerando-se que havia posições diferentes quando da sua avaliação pelos professores-colaboradores. No encontro presencial, discutiu-se a definição decimal de número par adotada, sendo considerada usual no ensino e correta do ponto de vista matemático. No espaço virtual

[6] A mensagem inicial do referido Fórum, assim como o sistema de codificação encontram-se no Anexo 2.

do projeto, os 9 professores participantes do Fórum de discussão sobre essa questão foram unânimes em codificá-la como sendo *2b*, ou seja, uma resposta próxima à uma prova completa, explicitando propriedades pertinentes e com alguma dedução (cf. trechos reproduzidos abaixo).

Fóruns de Discussão - Ver Mensagem

Mensagem do Fórum *A prova de Duda*

Título	Autor
Como codificar ?	pesquisador

Mensagem

Na sua opinião, Duda é uma prova completa em A1?
Por favor, explique qual código (0, 1, 2a, 2b, 3) você acha que esta justificativa deve receber.

Uma descrição dos códigos está disponível na área de Atividades.

Figura 6a: Mensagem inicial do Fórum sobre a codificação de A1

6. **Re: Como codificar** — *Antenor*

Gosto particularmente da resposta de Duda, ao meu ver, é uma resposta acima da média, embora não seja completa, desse modo a classificaria em 2b.

7. **Re: Como codificar** — *Valdir*

Acredito que a classificação pode ser 2b apesar de ela não ter justificado por que somando "dois números entre 0,2,4,6e 8, a soma ainda vai terminar em 0,2,4,6 e 8".

11. **Re: Duda** — *Erica*

Falta pouco para chegar a uma prova completa. Voto 2b.

Figura 6b: Participação de professores no Fórum sobre a codificação de A1

Para a questão A5, por incluir itens que poderiam ser resolvidos por meio de cálculos, o sistema de codificação foi alterado. Uma das respostas obtidas para o item c mereceu mais atenção, pois provocou um certo conflito entre respostas "certas ou erradas" e a construção de argumentos que se baseiam em propriedades. O fato da resposta não estar correta, mas a justificativa enfocar propriedades pertinentes, gerou uma diversidade de opiniões e levou, num primeiro momento, a codificações bastante distintas por parte dos professores (cf. Figuras 7a e 7b).

Fóruns de Discussão - **Ver Mensagem**

Mensagem do Fórum *Resposta/Justificativa de 5e*

Título	Autor
Como codificar?	pesquisador

Mensagem

Essa resposta obtida em dois pilotos também gerou muita discussão no encontro de quarta-feira (26/10).
Questão 5e
Resposta:
0, 2, 4, 6 ou 8.

Justificativa:
"pois sempre a última multiplicação será "2x1" que é igual a "2" e todo número multiplicado por 2 é um número par.

Como poderíamos classificar essa resposta?

Lembrem-se que para essa questão, estamos propondo uma outra "codificação":
-2 em branco
-1 "não sei"
E errada
S correta (Sim), sem justificativa.
C correta com justificativa baseada no cálculo (ou seja, o aluno calcula o fatorial e verifca/analisa o resultado)
P correta apresentando na justificativa uma propriedade do fatorial.

Vamos "trocar" algumas idéias, pois há opiniões diferentes para esse caso!

Figura 7a: Mensagem inicial do Fórum sobre a codificação de A5e

---

2. **Re: Como codificar?** *Juliano*

Código P considerando a justificativa fundamentada em uma propriedade do cálculo fatorial.

---

3. **Re: Como codificar?** *Antenor*

Do outro modo, classificaria como 3 tb, a afirmação é contundente, utiliza o conceito de números pares em um processo de multiplicação, no meu entender mais significativa e abrangente à série em que se aplica. A resposta é Correta

---

4. **Re: Como codificar?** *Silvana*

E errada, pois a solução não é 0, 2, 4 ou 8, apenas 0

Figura 7b: Participação de professores no Fórum sobre a codificação de A5e

Essa tendência em atentar para as justificativas, além do “certo-errado”, considerando efetivamente a essência dos argumentos – empírico, empírico com propriedades e geral (conceitual) – foi observada nesta etapa. Entretanto, trata-se de uma posição relativamente frágil, nem sempre adotada (ou defendida) por todos os professores.

Observando a continuidade do processo, no segundo memorial (elaborado após a Fase 1), temos mais algumas indicações da maior valorização dos argumentos do tipo *exemplo genérico* em Álgebra, como ilustram os relatos que seguem.

> *FRANKLIN:* **Nota 2a** *– ele explicita uma propriedade mas falta muito para ser uma prova completa. (No início do projeto, atribuí a essa prova – nota 1 como se tratando de um caso particular. Todavia ao ser convidado a pensar que os símbolos usados por ele expressassem a idéia que "somando quantias pares sempre poderemos continuar formando pares" mudei a referida nota).*
>
> *HANNA:* **Nota 2b** *– O raciocínio está muito bom. Faltou apenas uma generalização.*
>
> *Valdir (Perfil final)*

> *Franklin:* **Nota 8**. *É uma prova muito interessante, ele faz uso de figuras, para dizer que uma certa quantidade par de objetos somada com outra quantidade par de objetos só poderá resultar numa quantidade final par de objetos. Considero um bom desenvolvimento, porém sinto falta de algo mais geral, embora não seja, parece que Franklin apresenta um exemplo. Sei que a idéia dele é muito mais que um simples exemplo como de Beth, por exemplo.*
>
> *Hanna:* **Nota 8**. *ela apresenta uma solução que a primeira vista parece ser um exemplo simples, no caso 8 + 6 =14, porém quando ela escreve o 8=2.4 e 6=2.3 ela faz uso de propriedade, e depois quando escreve que 14 = 2(4+3), ou seja, coloca o 2 em evidência e finaliza dizendo que 8 + 6 = 2.7, ela mostra que tem domínio sobre propriedade dos pares e por isso está a um passo de apresentar uma demonstração formal, falta pouco.*
>
> *William (Perfil final)*

No entanto, cabe ressaltar que esta valorização ocorre particularmente em Álgebra, não sendo os *exemplos genéricos* em Geometria (questão G1) igualmente percebidos ou tratados pelos professores. As notas atribuídas ao argumento de Hélia, pelos mesmos sujeitos acima citados, confirmam claramente esta afirmação.

> *HÉLIA: Nota 1 – todo o desenvolvimento acabou sendo o mesmo que examinar um caso particular.*
>
> *Valdir (Perfil final)*

> *HÉLIA: Nota 4 – o fato dela ter traçado as perpendiculares não colaborou em nada, se era para medir os ângulos e depois verificar que a soma dava 180°, poderia tem medido direto os ângulos internos do triângulo sem traçar as perpendiculares, desta forma considero que a Hélia fez muito pouco.*
>
> *William (Perfil final)*

4. Considerações finais

A principal questão examinada nesse artigo refere-se à participação de professores de Matemática num projeto de pesquisa. Mais especificamente, buscou-se investigar em que medida essa experiência pode contribuir para transformar as concepções desses professores sobre argumentação e provas e seu ensino, e neste caso, indicar como essas mudanças ocorrem.

Nossos resultados mostram claramente que, no início do projeto, os professores não se sentiam preparados para trabalhar esse assunto com seus alunos. Suas visões sobre prova eram limitadas por suas formações iniciais (que enfatizaram apenas provas formais) e pelas suas experiências em sala de aula, indicando que as demonstrações formais são inacessíveis aos alunos. A partir dos dados coletados no perfil inicial, um conflito pode ser identificado: para os professores, provas matemáticas são argumentos apresentados formalmente envolvendo transformações de propriedades matemáticas, mas eles consideram que seus alunos aceitariam a validade de uma afirmação examinando apenas um (pequeno) número de exemplos. Ademais, os professores não consideram o potencial dos *exemplos genéricos* (Balacheff, 1988), pois não sabem como aproveitá-los para levar os alunos a construir provas matematicamente válidas.

Analisando a implicação dos professores na definição do questionário, é possível identificar o início de um processo de reflexão, por parte dos professores, sobre o que pode ser esperado de seus alunos e também sobre a percepção de que certos tipos de argumentos apresentados por meio de exemplos, nem sempre deveriam ser considerados de natureza completamente empírica, pois, eventualmente, traços de uma “boa” prova podem estar neles presentes. As discussões, tanto presenciais quanto virtuais, ilustram essas reflexões. Entretanto, o que achamos importante destacar é que todas essas atividades ocorreram no contexto da atividade de pesquisa – não foram exercícios feitos por si mesmo. Estas atividades tinham um objetivo explícito e palpável relativo às exigências de participação em um projeto coletivo, visando a construção de um sistema comum de codificação, inspirado em fundamentos teóricos de estudos na área de Educação Matemática.

Apesar dos pontos positivos, nossos resultados mostram a complexidade desse processo de mudança. Nesse artigo, examinamos apenas algumas das atividades relativas à primeira fase do projeto. Entretanto, ao longo de seu desenvolvimento, os professores participaram de outras etapas que também podem contribuir para esse processo. A fim de melhor caracterizar o impacto da pesquisa, será necessário analisar, em conjunto, os resultados associados às outras fases e compará-los aos demais fatores que integram as práticas docentes, como por exemplo, as orientações curriculares nas escolas, os materiais e livros didáticos utilizados pelos professores, as discussões em reuniões pedagógicas ou programas de formação, entre outros. Assim, há ainda um longo caminho a ser percorrido se desejamos formar profissionais preparados para criar culturas nas suas salas de aula que envolvam os alunos nos vários aspectos do exercício da prova e validação matemática.

Referências Bibliográficas

ALEKSANDROV, A., (1963). A General View of Mathematics. In: ALEKSANDROV, A., KOLMOGOROV, A., LAVRENT'EV, M. (Eds.). *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, p. 1-64.

ARTIGUE M., (1991). Epistémologie et Didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 10 (2/3), p. 138-170.

BALACHEFF, N., (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). *Mathematics Teachers and Children.* London: Hodder and Stoughton, p. 216-235.

BALACHEFF, N., (1999). Apprendre la preuve. In: SALLANTIN J., SZCZECINIARZ, J. J. (Eds.). *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*. Paris: PUF, p. 197-236.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

CHAZAN, D., (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), p. 359-387.

DUVAL, R., (1999). Representation, Vision and Visualisation: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. In: HITT, F., SANTOS, M. (Eds.). *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME.* Cuernavaca, Morelos/México, October 23-26, p. 3-26.

GREENWOOD, D. J., LEVIN, M., (2000). Reconstructing the relationships between universities and society through action research. In: DENZIN, N., LINCOLN, Y. (Eds.). *Handbook for qualitative research*. Thousand Oaks, Ca.: Sage, p. 85-106.

HEALY, L., HOYLES, C., (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report. London: University of London, Institute of Education.

HEALY, L., HOYLES C., (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), p. 396-428.

KNUTH, E., (2002) Teachers' conceptions of proof in the context of Secundary School of Mathematics. *Journal of Mathematics Teachers Education*, n. 5(1), p. 61-88.

KÜCHEMANN, D., HOYLES, C., (2000-2002) *Technical Report on the Longitudinal Proof Project.* London: University of London, Institute of Education. Disponível em: http://www.ioe.ac.uk/proof/techreps.html. Último acesso em: 8/abril/2007.

LIGHT, P., GIROTTO, V., LEGRENZI, P., (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, n. 5, p. 369-383.

PIETROPAOLO, R. C., (2005). *(Re)Significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática*. Tese de Doutorado. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

WASON, P. C., (1966). Reasoning. In: FOSS, B. (Ed.). *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth/UK: Penguin Books.

WU, H., (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1), p. 221-237.

ANEXO 1 – Questionário sobre Prova

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4 4 + 2 = 6
2 + 4 = 6 4 + 4 = 8
2 + 6 = 8 4 + 6 = 10

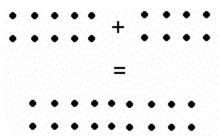
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada.

(B) Zé precisa construir uma nova prova.

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique.

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21?
Justifique.

d) **62!** é um múltiplo de 37?
Justifique.

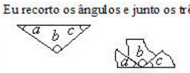
e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.
Justifique.

G1: Amanda, Dario Hélia, Cintia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

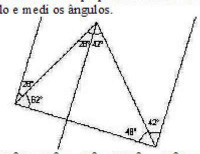
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90° - 28°) + 28° + 42° + (90° - 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cintia

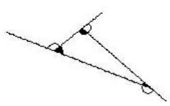
Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

Afirmações	Justificativa
$p = s$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$	Ângulos numa linha reta.
Logo $s + t + r = 180°$	

Então Cintia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns triângulos.		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

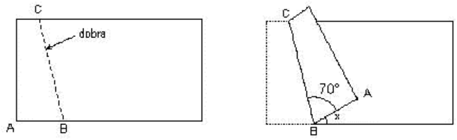
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360°.

Justifique sua resposta:

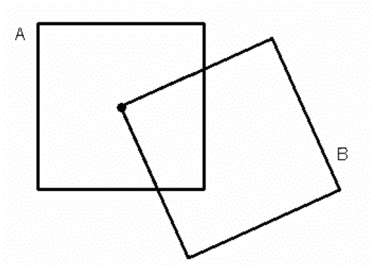
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta.

ANEXO 2

Sistema de codificação das respostas

0: Respostas totalmente erradas, que não apresentam justificativas ou exemplos, ou que simplesmente repetem o enunciado, caracterizando um "circulo vicioso".

1: Respostas com alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências. Por exemplo, respostas que são completamente empiricas.

2: Respostas com alguma dedução/inferência, explicitando propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova.

2a: Falta muito para se chegar a uma prova completa (mais próximo de 1)

2b: Falta pouco para se chegar a uma prova completa (mais próximo de 3)

3: Respostas corretas, totalmente justificadas.

*Para a **questão A5***:

3C: resposta correta, justificada por meio de cálculo

3P: resposta correta, justificada por meio de propriedades

Mensagem inicial do Fórum referente à codificação da questão G3

Fóruns de Discussão - Ver Mensagem

Mensagem do Fórum *Justificativas/Provas da G3*

Título	Autor	Data
Como classificar?	pesquisador	28/10

Mensagem

Obtivemos uma resposta para a questão G3 (soma dos ângulos internos de um quadrilátero) que deu muita discussão na reunião de quarta (26/10).
Como vocês classificariam essa resposta:

"O triângulo é a metade de um quadrilátero portanto a soma dos seus ângulos internos será metade da soma dos ângulos internos do quadrilátero 360/2=180"

Essa justificativa vem acompanhada de desenhos de 4 quadriláteros decompostos em triângulos por uma diagonal.

E aí? Qual código (0, 1, 2a, 2b, 3) essa resposta deve receber?????