APROPRIAÇÃO DAS SIGNIFICAÇÕES DO CONCEITO DE DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

AMORIM, Marlene Pires – UNESC – marlepires@yahoo.com.br
DAMAZIO, Ademir – UNESC – ademir@unesc.net
GT: Educação Matemática / n.19
Agência Financiadora: CAPES

Introdução

A aprendizagem escolar sempre foi tema gerador de discussões nos eventos organizados no Brasil e em todo o mundo, principalmente aqueles que se caracterizam como eventos científicos.

Focando o olhar para o ensino de matemática, mais especificamente sobre a apropriação de significação de conceitos científicos, percebemos que ainda é comum os professores fazerem a abordagem dos conceitos, por vias metodológicas totalmente desprovidas de uma reflexão teórica. Ou, quando a estuda, o objetivo é buscar uma forma dos alunos aprenderem com rapidez aquela extensa relação de conteúdos que as propostas curriculares oficiais e os livros didáticos propõem.

Muitas vezes, dependendo da concepção, a corrida é em busca de recursos didáticos alternativos que prendam a atenção do aluno entendido como condição primordial para a aprendizagem matemática.

Com isso, não queremos fazer julgamento de certo ou errado dos professores que galgam sua prática pedagógica em concepções que priorizam um aspecto do processo educativo em detrimento de outros. Entendemos que a concepção de educação do professor se constitui ao longo de sua formação profissional ou mesmo antes de adentrar no curso de graduação. Ela surge por influências oriundas da relação homem e sociedade, traduzidas implícita ou explicitamente nos conteúdos escolares e acadêmicos.

No entanto, vale dizer que não nos sentimos conformados com relação à matemática, o seu ensino e sua aprendizagem, que a literatura tem mostrado como situação pouco alentadora, principalmente, quando a referência é a escola básica pública.

Também, não comungamos com o referencial teórico de matriz idealista que fundamenta o processo educativo e produz esse estado incômodo do ensino-aprendizagem de matemática. Por isso, no presente estudo, procuramos atender os pressupostos da abordagem Histórico-Cultural, teoria que fomos assumindo, por atender convicções construídas num processo de reflexão sobre a concepção de mundo, homem, sociedade e matemática.

A referida teoria não cria pares dicotômicos entre: conteúdo e forma, conhecimento e consciência, produção e apropriação do conhecimento, abstrato e concreto, conhecimento científico e conhecimento cotidiano, aprendizagem e desenvolvimento, professor e aluno, entre outros elementos conceituais do processo educativo. Em vez disso, trata-os de forma inter-relacionada, compondo um todo indissociável, porém, cada um desses elementos tem sua especificidade e função na formação humana.

Diante desse contexto do ensino de matemática, dúvidas se apresentam sobre o ensino-aprendizagem e questionamos sobre a forma como os alunos se apropriam das significações dos conceitos científicos de matemática.

A nossa problemática diz respeito ao estudo dos aspectos essenciais ao entendimento do campo numérico dos Números Racionais que, atualmente, são negligenciados no processo educativo escolar, privando os alunos da plena compreensão conceitual.

Para tanto, levantamos as seguintes questões: Quais os elementos fundamentais a serem considerados da categoria lógico-histórica para elaboração das atividades de ensino-aprendizagem e levar os alunos à elaboração do conceito de números racionais? Quais as manifestações dos alunos que revelam a aprendizagem ao desenvolverem as atividades, considerando o processo sincrético-analítico-sintético?

A razão da opção pelos números racionais está na exigência de um salto qualitativo de pensamento em relação aos números naturais, normalmente privilegiado pelos currículos escolares.

Nesse novo campo numérico, as operações básicas não mais atuam sobre o princípio do anterior, como por exemplo, a divisão entre dois números inteiros que teria como resultado um número inteiro menor do que o dividendo; no novo campo, a divisão entre números fracionários, por exemplo, poderá resultar num número maior que seus termos. Assim, também, na reta numérica entre um número racional e outro há infinitos pontos que são representados pelos números fracionários, enquanto entre dois inteiros, não existe outro inteiro.

Na quinta série do Ensino Fundamental, as atividades avançam para as operações com números fracionários. Comumente, o professor "ensina" a adição e subtração pela "técnica" de mínimo múltiplo comum, em que o aluno memoriza o procedimento de dividir o m.m.c. (abreviação do mínimo múltiplo comum) pelo denominador e o quociente obtido, multiplica pelo numerador; em seguida, adiciona ou subtrai, conforme a operação indicada, os novos numeradores e conservando o denominador.

A aprendizagem efetiva da matemática não consiste apenas no desenvolvimento de habilidades (como do cálculo ou da resolução de problemas), ou na fixação de alguns conceitos através da memorização ou da realização de uma série de exercícios. O aluno apreende significativamente matemática quando consegue atribuir sentido e significado às idéias matemáticas – sobre elas, é capaz de pensar, estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. (FIORENTINI, 1995)

Enfim, o nosso objetivo foi fazer uma leitura do ensino e aprendizagem dos números racionais, analisando as múltiplas relações do processo de formação do conceito, tendo como base a categoria lógico-histórica, o processo sincrético-analítico-sintético e a relação de ascensão do abstrato ao concreto.

De forma mais específica, propomo-nos: a) Estabelecer critérios concernentes à Teoria Histórico-cultural para elaboração das atividades de ensino-aprendizagem que levem os alunos da 5ª série do Ensino Fundamental à apropriação do conceito dos números racionais; b) Analisar os procedimentos adotados e as características de pensamentos manifestados pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades referentes ao conceito de números racionais.

No presente texto, o foco será as principais ações propostas aos alunos e as evidências de suas apropriações referentes ao conceito de divisão de números racionais.

Apropriação de significações de conceitos

A abordagem psicológica Histórico-Cultural e a tendência pedagógica Histórico-Crítica enunciam que a apropriação do conhecimento científico reivindica um método que permita ao aluno compreender-se como sujeito histórico-cultural.

Nesse aspecto, Vigotski (2001) define o ensino-aprendizagem como processo que se desenvolve não linearmente e ocorre em estágios interligados do pensamento: sincrético-analítico-sintético.

O estágio sincrético estabelece entre o pensamento e o objeto uma relação de imagem confusa, de forma que, não se identifica claramente as relações e significações do conteúdo do mesmo. O sujeito necessita do sensório-perceptivo e estabelece relação com o contexto.

No estágio analítico, identifica características comuns dos objetos e estabelece vínculos com outros conceitos criando cadeias de elementos comuns. A característica fundamental deste estágio é a possibilidade de análise das múltiplas relações entre os conceitos.

O estágio sintético é determinado pela generalização, as significações ou os vínculos relacionais que estabelecem com outros conceitos, fortemente marcados pela abstração. A criança ou pré-adolescente apesar de pensar sinteticamente o conceito, ainda operam analiticamente estabelecendo vínculos com o concreto-material.

Na fase inicial da elaboração do conceito, o adolescente busca alguma referência em situação concreta e aos poucos, vai dissociando e movimentando-se em um plano mais abstrato. Mesmo o adulto num momento de elaboração do conceito, tende o seu pensamento a transcorrer no nível de pensamento por complexo, chegando às vezes, a descer a formas mais elementares e mais primitivas. Vigotski (2001).

Para Vigotski (2001, p. 247) a ação escolástica do professor acaba substituindo "a apreensão do conhecimento vivo pela apreensão de esquemas mentais mortos e vazios".

As vinculações conceituais que dizem respeito à especificidade da presente pesquisa foram buscadas no processo histórico de produção das significações do conceito de números racionais.

Segundo Vigotski (2001), um conceito é a palavra com seu significado, produzido historicamente pelo homem. Por isso, primeiro é social, e depois, individual. O sujeito se apropria das significações do conceito ao resolver um problema, de posse de outros conceitos já abstraídos, que darão suporte para internalizar e introduzir mais um conceito em seu sistema de conhecimento. Mas, sozinho o sujeito não se apropria de forma integral do conceito. Afirma esse autor que é necessário a mediação de outro que possa propor não só a atividade que explicite a lógica do conceito, como também se disponha a auxiliá-lo nos momentos que ele necessita de ajuda.

Anuncia Vigotski, que no processo de apropriação de significação de conceitos são percebidos dois tipos: os cotidianos e científicos.

Damazio (2000) diz que o conhecimento cotidiano é assistemático, involuntário, dependente do contexto e são desenvolvidos sem a necessidade de escolarização formal. Os conceitos científicos são sistemas de relações formulados historicamente pela cultura e não pelo indivíduo em si, e constitui-se de leis, princípios e teorias.

Os conceitos científicos e cotidianos seguem caminhos opostos, mas de modo algum se separam, ao contrário, tendem a se inter-relacionarem. Eles se encontram, porém, não se fundem; os conceitos cotidianos são ressignificados pelos conceitos científicos que subsidiam as formas elementares, não porque tem um fim inferior, ao contrário, a sua forma superior de estruturação permite que no seu processo de elaboração mostre toda a sua supremacia e dinâmica na movimentação das funções psicológicas superiores. Os conceitos científicos tendem a trazer para uma forma mais complexa de conhecimento, o que até então, era conhecido de forma dependente do contexto, que não tem uma estrutura superior para representar a existência e função desse conceito.

A inter-relação existente no processo de desenvolvimento desses dois conceitos consiste em que os conceitos cotidianos devem atingir certo nível para poder assimilar de forma geral os conceitos científicos. Esses, por sua vez, tornam possível a assimilação quando os conceitos cotidianos atingem um determinado nível de desenvolvimento.

É no vínculo de desenvolvimento dos dois conceitos que se revela a sua verdadeira natureza e se constitui a zona de desenvolvimento próximo e do nível atual de desenvolvimento. O conceito cotidiano adquire novas relações com outros conceitos e também com o objeto ao colocar-se entre o conceito científico e o seu objeto.

Quanto à categoria lógico-histórica, Duarte (1987, p. 29) define: “O lógico é o ponto de partida e de referência para a seleção dos traços essenciais do desenvolvimento histórico, mas essas etapas não se encontram direta e imediatamente expressas no lógico”. O lógico é entendido como a abstração da realidade objetiva. Mas, para tal, é necessária uma busca histórica da significação conceitual, ou seja, a análise da multiplicidade de determinações. Como ponto de chegada, o lógico é o concreto pensado.

A respeito do estudo histórico do conceito, diz Vigotski (2003, p. 85-86): “Estudar alguma coisa historicamente significa estudá-la no processo de mudança: esse é o requisito básico do método dialético”. Assim sendo, o estudo histórico não é apenas um aspecto auxiliar, mas sua verdadeira base.

Por sua vez, Giardinetto (1991) afirma que a relação lógico-histórica é um método de investigação indispensável para a pesquisa em Matemática. O estudo do processo de desenvolvimento histórico é que vai fornecer elementos para elaboração de uma seqüência lógica de ensino, de forma tal que reflita a história.

No ensino-aprendizagem de matemática, o lógico como ponto de partida se justifica porque a referência é o conceito científico que vai ressignificar o conceito cotidiano. Dessa forma, as abstrações - próprias do conceito científico - passam a ser indispensáveis no movimento de ascensão e descenso, respectivamente dos conceitos cotidianos e científicos.

Como afirma Giardinetto (1991, p. 27):

> As abstrações são, portanto, mediações de um concreto caótico, obscuro, para um concreto na compreensão da multiplicidade de suas partes. O concreto, portanto, revela-se como ponto de partida e de chegada do processo de elaboração do conhecimento.

Portanto, partir do concreto e chegar ao concreto, significa estar diante de uma realidade que foi construída historicamente pela humanidade, organizada e fundamentada em conceitos científicos. Se a apropriação de um conceito matemático requer a compreensão dos seus traços essenciais elaborados historicamente, então deve existir um espaço social para que isso ocorra: a escola.

Nesse espaço, o professor é o sujeito humano com a incumbência social de elaborar a seqüência de ensino-aprendizagem em que entra em cena: o concreto sincrético do pensamento do aluno, ponto de partida, por representarem uma imagem confusa e não terem vínculos com outros conceitos; o concreto síntese, atingido com a apropriação das significações históricas.

Segundo Giardinetto (1991) nos meios escolares, o abstrato traz o estigma de algo difícil de ser compreendido por não ter vínculo com a realidade do aluno. Da mesma forma, o concreto é entendido como o imediato, apreensão do real, decorrendo duas interpretações: o concreto traduzido na forma de "materiais concretos", com o objetivo de organizar atividades de forma que o "concreto" seja manipulado, observado ou desenhado; a segunda interpretação associa o "concreto" com o cotidiano, ao não escolar. Afirma o autor que nessa perspectiva espera-se, com o ato de manipular o "concreto", o aluno supere suas dificuldades de aprendizagem.

O par categorial abstrato-concreto no processo lógico-histórico não é concebido como mera classificação de apreensão da realidade, como mencionado no parágrafo anterior. O concreto é mediatizado por abstrações, ou seja, "do concreto sincrético ao concreto síntese, o pensamento opera analiticamente". GIARDINETTO (1991, p. 12).

Vale lembrar que os estágios de evolução dos conceitos, abordados por Vigotski (2001), refletem esse processo lógico-histórico. No estágio sincrético, o sujeito diante da realidade compreende o concreto de forma caótica, obscura, pois não percebe as características, os vínculos do conceito; no estágio analítico, desenvolve vínculos e forma cadeias com outros conceitos na multiplicidade das relações; e no estágio sintético, chega-se ao concreto pensado, às significações lógico-históricas do conceito.

Giardinetto (1991) faz uma análise da operação realizada durante o processo de elaboração do conceito, dizendo que o pensamento não se encerra em abstrações. Segundo ele, é das determinações abstratas que o pensamento promove, num movimento de síntese, uma articulação de suas partes, fazendo com que a imagem do objeto deixe de ser um todo caótico, transformando-se em todo coeso, compreendido em sua essência, na unidade de suas relações.

Diante dos pressupostos teóricos, elaboramos uma seqüência de atividades sobre o surgimento; as propriedades de equivalência e denominadores comuns e; as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de Números Racionais. O estudo foi desenvolvido com alunos de quinta série do Ensino Fundamental de uma escola pública. Porém, nesse artigo, discutiremos as idéias e relações conceituais das atividades desenvolvidas pelos alunos com as operações de multiplicação e divisão.

As significações lógico-históricas dos Números Racionais

Primeiramente, enunciaremos os princípios adotados para elaboração das atividades: a) O ponto de partida e de chegada foi a generalização do conceito; b) a medição de segmentos de reta como o elemento geométrico principal das operações de medidas; c) manutenção das propriedades do campo dos números inteiros; d) pensamento algébrico das relações de medidas apropriadas como ponto de chegada.

É importante dizer que nesse texto daremos ênfase às idéias essenciais do conceito de divisão, porém o objeto e problema de estudo foi o conceito de números racionais como um todo. Durante o desenvolvimento das atividades propostas, várias idéias e relações conceituais foram se estabelecendo, as quais destacamos as sínteses das noções essenciais apropriadas pelos alunos das operações de adição, subtração e multiplicação.

O processo dialógico pesquisador/aluno, mediado pelas significações historicamente produzidas referentes às operações, constituía zona de desenvolvimento próximo indicadoras das possibilidades intelectuais dos alunos. Como conseqüência, eles se apropriavam das noções e da lógica caracterizadoras dos referidos conceitos.

As idéias essenciais que fundamentam os conceitos das operações de adição e subtração de números racionais foram assim generalizadas: Os termos fracionários a serem adicionados ou subtraídos devem ter como referência a mesma unidade-todo, tanto em sua representação aritmética quanto geométrica. Assim, quando as frações tiverem denominadores diferentes: a) a unidade-todo será dividida em partes iguais ao número de um dos denominadores; b) também subdividida em partes iguais ao número do segundo denominador; c) finalmente, a divisão exigirá tantas partes quanto for o produto dos denominadores. Isso significa dizer que há uma transformação em frações equivalentes, necessariamente, com os mesmos denominadores.

Quanto à operação de multiplicação, a abordagem adotada criou condições para os alunos conviverem com interpretações da dinamicidade conceitual. Tal operação, nesse campo numérico, não se sustenta por si só, pois articula uma série de relações com outros conceitos, como: a) medida de segmento de reta; divisão aritmética e geométrica (segmento); b) divisão da divisão (por exemplo, tomar dois terços de quatro quintos); c) identificação de uma nova fração (tomar terços de quintos que se transforma em quinze avos); d) adição de fração (por exemplo, $\frac{4}{15}+\frac{4}{15}$, cuja soma, $\frac{8}{15}$, é o produto esperado da operação da multiplicação $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$).

Essas relações subsidiaram cientificamente a elaboração da síntese que explicita a multiplicação propriamente dita, uma vez que nas articulações conceituais ela não aparece.

Se a multiplicação de números fracionários envolve relações complexas, a divisão requer também saltos qualitativos de pensamento dos alunos em relação à mesma operação no campo dos números naturais.

Para elaborarmos atividades que propiciassem diálogos com os alunos e que eles desenvolvessem o pensamento referente à lógica da divisão de números racionais, tivemos que pensar numa forma de manter o pressuposto de iniciar pela representação em segmento de reta, tendo em vista que Caraça e Bézout não assim procedem nem mesmo com a multiplicação.

Contudo, o estudo da síntese algébrica produzida por Caraça e as explicações de Bézout contribuíram para continuarmos com a idéia geométrica também na divisão. A operação inicial apresentava o dividendo fracionário e o divisor inteiro, $\frac{1}{2}:2$.

Solicitamos aos alunos para traçarem um segmento-unidade de 8 cm e, imediatamente, tomaram um meio (4 cm) como referência. Em seguida, dividiram-na em duas partes iguais, conforme indicava o divisor 2, concluindo que cada uma parte obtida corresponde a $\frac{1}{4}$. Foi escrito no quadro e os alunos anotaram em suas folhas a síntese da operação: $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$.

No desenvolvimento desses procedimentos e operações, os alunos não manifestaram dificuldades, uma vez que havia se tornado rotineiro - tendo em vista as atividades realizadas com as demais operações anteriormente - a ação de traçar segmento de reta unidade e fracioná-lo. Além disso, a medida 8 cm permitia que as duas divisões realizadas (8:2 e 4:2) fossem exatas. Todavia, essa regularidade se torna apenas aparente quando passamos a discutir algumas noções relacionadas à divisão. Uma delas é a idéia de medida que pressupõe a quantidade de "vez" que o divisor está contido no dividendo. Assim, a divisão $\frac{1}{2} : 2$ interroga: quantas vezes o 2 cabe em $\frac{1}{2}$? No caso, $\frac{1}{4}$ de vez.

Para os alunos era uma idéia estranha pensar que um número inteiro cabe em um número fracionário - parecia não ter sentido para eles. Inspiramo-nos em Caraça (2003, p. 6) dizendo-lhes que a matemática traz essas "aventuras da razão", obrigando-nos a pensar além do perceptível aos nossos olhos.

As discussões voltaram-se para o resultado obtido de 4 partes de 2 cm da unidade-todo, $\frac{1}{4}$. Alguns alunos, na tentativa de interpretar a idéia lançada, repetiam para si a pergunta: *Quantas vezes 2 unidades inteiras cabem em* $\frac{1}{2}$*?* Auto-respondendo reproduziam: *É que 2 unidades inteiras cabem* $\frac{1}{4}$ *de vez em* $\frac{1}{2}$.

Manifestações dessa natureza eram alentadoras por vislumbrarmos as possibilidades da maioria dos alunos aprenderem e desenvolverem o pensamento referente ao conceito de divisão. Em outras palavras, as expressões sinalizavam a constituição de zona desenvolvimento próximo e, conseqüentemente, sugeria nossa disponibilidade para auxiliar no entendimento de noções e relações conceituais tão complexas.

Dessa forma, retomemos as relações estabelecidas àquela operação, o que não foi suficiente para a compreensão de alguns alunos. Outra representação de análise se fez necessário: tomar o segmento $\frac{1}{2}$ e, em seguida, verificar quantas vezes é possível sobrepor (medir) nele o segmento de duas unidades, como aparece a seguir na figura 1:

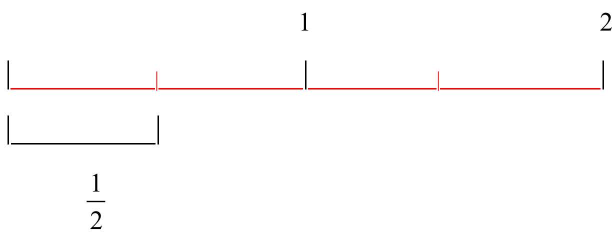

Figura 1

Os alunos observaram que o segmento superior de duas unidades, não cabia nenhuma vez inteira no segmento $\frac{1}{2}$, a parte que sobrepõe equivale a $\frac{1}{4}$ do todo. Mesmo assim, para alguns alunos, gerou conflito na forma de pensar, motivado na relação em que $\frac{1}{2}$ de uma unidade passou a corresponder a $\frac{1}{4}$ do todo de duas unidades. A dificuldade estava em admitir o segmento representativo do divisor com uma unidade.

Para Vygotski (1995) a passagem de um nível operacional aritmético para outro é sempre conflitiva. Por isso, é que não insistimos na mesma operação e propomos que resolvessem 2: $\frac{1}{2}$ como uma forma deles aceitarem o divisor como unidade medida, independente do comprimento do segmento.

Houve alunos que apresentaram como quociente também $\frac{1}{4}$ de vez, apresentando como justificativa o fato de estarem operando com os mesmos números, ou seja, 2 e $\frac{1}{2}$.

A idéia matemática que se apresenta aos alunos é a da comutatividade válida para a multiplicação, trazida equivocadamente à divisão.

Para que eles mudassem essa idéia, solicitamos que representassem geometricamente 2: $\frac{1}{2}$. A primeira atitude da maioria dos alunos foi traçar um segmento de 2 cm. Chamou-nos atenção o critério de alunos adotando 2 cm para a medida do segmento como obrigatório em função do dividendo. Nossa fala se compunha de informação e questionamento para expressar o significado do 2 como duas unidades que poderiam ter outras medidas e não somente dois centímetros.

Sugerimos que continuassem adotando a medida de 8 cm para cada unidade, e assim, evitar divisões não exatas no momento de determinar a metade. Uma divisão inexata naquele momento correria o risco de alguns alunos cometerem erro de cálculos que necessariamente exigiria nossa intervenção e nela se desviaria a atenção da divisão de fração propriamente dita. A exigência era a construção de dois segmentos unidades que passariam ser a referência para as relações a serem estabelecidas em seguida.

A operação indicada era a divisão do dois em meios, o que os alunos procederam normalmente, precedida de nossa pergunta-guia: “Quantas vezes a metade cabe em duas unidades inteiras?”. Ao observarem a representação geométrica, responderam: “4 vezes!”. Outra pergunta-guia que traduz uma nova interpretação da divisão, também foi lançada aos alunos: “Quantas vezes o um meio cabe em dois inteiros?” A maioria dos alunos procedeu a contagem analisando os dois segmentos e anunciaram o quatro como resposta.

Ainda teve alunos que necessitaram de ajuda e de contribuições de nossa parte. Conforme Vigotski (2001), as fases dos estágios de desenvolvimento de conceitos se apresentam individualmente. Isso nos remete a pensar que cada aluno tem o seu momento de elaboração de síntese do conceito. Enquanto, muitos deles abstraíram essa operação, outros estavam no estágio analítico ou sincrético.

Caraça (2003, p. 42) indica, algebricamente, que por critérios estabelecidos, mantêm-se as propriedades e analogias a outras sínteses já desenvolvidas com números inteiros, nesse caso, aplica-se a seguinte propriedade:

> $\frac{p}{q} : n = x \Rightarrow n.x = \frac{p}{q}$, logo: $\frac{p}{q.n}$. À igualdade de condição, n.x = $\frac{p}{q}$, satisfaz o número x = $\frac{p}{q.n}$, visto que $\frac{p}{q}.n = \frac{p.n}{q.n} = \frac{p}{q}$ e este número é único, pela unicidade do produto, tem-se portanto: $\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q.n}$.

Assim, 2: $\frac{1}{2}$ = 2.2 = 4. Apresentamos outras divisões com as mesmas características das duas anteriores – dividendo inteiro e divisor fracionário e vice-versa – que foram resolvidas por representação geométrica e pela definição algébrica. Enfim, o ambiente de aprendizagem dos alunos estimulava-nos para propor uma divisão em que o dividendo e divisor fossem números fracionários.

Isso foi antecedido de uma análise atenciosa das demonstrações algébricas de Caraça (2003, p. 43), por considerarmos adequadas para aquele momento da pesquisa. O autor faz a seguinte discussão:

> $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=x \Rightarrow x.\frac{r}{s}=\frac{p}{q}$. À igualdade de condição satisfaz o número x = $\frac{p}{q}.\frac{s}{r}$, visto que, $\frac{p.s}{q.r}.\frac{r}{s}=\frac{p.s.r}{q.r.s}=\frac{p}{q}$ e tal número é único, em virtude da unicidade do produto; tem-se, portanto: $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p.s}{q.r}=\frac{p}{q}.\frac{s}{r}$.

Importa observar que Caraça utiliza propriedades algébricas já comprovadas para fazer a demonstração da operação de divisão de dois números fracionários. Bézout (1849, p. 111) traz a seguinte explicação:

> Sendo o objeto da divisão fazer um número (o dividendo) tantas vezes menor quantas são as unidades de outro (o divisor), e sendo no exemplo proposto $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}$, o divisor $\frac{2}{3}$ trez vezes menor que 2, o quociente deverá ser trez vezes maior do que seria se o divisor fosse 2, e não $\frac{2}{3}$; mas para fazermos um quociente trez vezes maior, devemos fazer o dividendo trez vezes maior, isto é, multiplica-lo por 3: isto porêm é o que se faz logo que invertemos os termos ao divisor $\frac{2}{3}$, e praticamos a multiplicação, dizendo: $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}x\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$.

Nota-se que Bézout traz uma explicação para a regra comumente apresentada de que, se multiplicam os numeradores e denominadores entre si, invertendo primeiramente, a segunda fração.

Analisando a explicação dos dois autores, ambos sintetizam a divisão com dividendo e divisores fracionários como a multiplicação dos numeradores e denominadores entre si, porém precedida da inversão da segunda fração.

De acordo com Bézout, na operação de divisão com dividendo e divisor fracionário, o quociente terá um valor tantas vezes maior quantas forem o denominador do divisor. Por isso, se inverte a operação de divisão para multiplicação, se multiplicando o dividendo pelo denominador (que agora assume a função de numerador) do divisor e, conseqüentemente, o numerador do divisor assume a função de denominador.

Bézout diz que, nesse caso, opera inversamente em razão de o denominador ter como determinante a função principal, ou seja, aumentar a quantidade numérica do dividendo para obter como resultado um quociente tantas vezes maior quanto esse indicar.

Diante das sínteses apresentadas pelos autores, a divisão proposta foi: $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$. Embora os dois autores não adotassem a representação geométrica, solicitamos aos alunos que traçassem um segmento de reta de medida 8 cm e tomassem como referência a fração $\frac{1}{2}$.

No próximo passo envolvendo o divisor $\frac{1}{8}$, interrompemos a representação geométrica para buscar argumentos na própria definição de Caraça e Bezóut. Justificamos aos alunos que os matemáticos transformam essa operação de divisão em multiplicação. Dividir $\frac{1}{2}$ em $\frac{1}{8}$, a idéia é inverter a segunda fração e multiplicar pela fração dividendo, como forma de fazê-lo aumentar tantas vezes quantas for o denominador do divisor. Assim, era necessário multiplicar o dividendo pelo divisor, desde que o denominador do divisor assumisse o lugar do seu numerador e, automaticamente, o numerador passasse a ser o denominador.

Procederemos com o cálculo: $\frac{1}{2}.\frac{8}{1}$. Fazendo a interpretação da multiplicação de frações, teremos que aumentar $\frac{1}{2}$ em 8 vezes. Que equivale a $\frac{8}{2}=4$. Logo, dividir $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{8}$, é dizer que $\frac{1}{8}$ cabe 4 vezes em $\frac{1}{2}$.

A partir daí passamos à representação geométrica e alertamos aos alunos que, embora a divisão se transforme em multiplicação, geometricamente elas apresentam diferenças interpretativas. É possível determinar quociente tanto pela multiplicação ao inverter a segunda fração, como pela representação geométrica.

Desta forma, a pergunta lançada foi: Como poderíamos representar geometricamente a divisão $\frac{1}{2}\,por\,\frac{1}{8}$? Os alunos dividiram o segmento unidade em oito partes e notaram que em um meio continha 4 partes de um oitavo, conforme figura 2.

Outra interpretação foi a identificação de quantas vezes $\frac{1}{8}$ do segmento todo cabe em $\frac{1}{2}$ do referido.

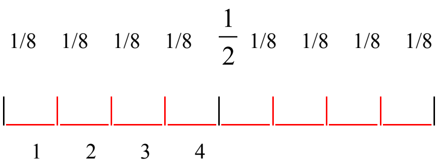

Figura 2

A análise geométrica como alternativa de buscar quantas vezes o oitavo coube na metade, levou à conclusão que foram quatro vezes.

Na representação acima, ficou perceptível para os alunos não só o quociente como também os dois termos da operação. Porém, essa relação lógico-visual não se apresenta claramente para outras divisões de frações, como por exemplo $\frac{2}{3}:\frac{3}{5}$. Por esse motivo, a decisão foi que adotássemos a definição recorrendo às idéias de Caraça e Bezóut de operação inversa, ou seja, a multiplicação, invertendo os termos do divisor.

Entretanto, tal determinação requereu esclarecimentos com base em análises das duas operações resolvidas anteriormente, comparativamente com a multiplicação. Por exemplo:

a) Em relação à multiplicação, se temos $\frac{1}{2}.\frac{1}{8}$, geometricamente teremos que dividir a metade do segmento todo em oitavos, ou seja, tomamos oitavos de cada metade, resultando em dezesseis avos. Verificamos que a demonstração geometricamente é operada entre oitavos e meios e não da unidade-todo.

b) Se a multiplicação for $\frac{1}{2}.8$, que é a inversa do exemplo da operação de divisão, ou seja, $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$, teremos a representação geométrica de que $\frac{1}{2}$ aumentará 8 vezes, resultando $\frac{8}{2}$, que sintetiza em 4 unidades.

A análise da síntese geométrica que resulta 4 unidades na multiplicação difere da divisão quando a idéia básica é verificar quantas vezes o divisor cabe no dividendo.

c) Para $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}$, representada geometricamente, é possível verificar que os oitavos aparecem 4 vezes em cada meio da unidade-todo. Nesse caso, não significa quatro segmentos unidades, mas a quantidade de vez que um oitavo aparece em um meio.

Outra justificativa apresentada foi que os próprios matemáticos não fazem questão ou se omitem de apresentar geometricamente a divisão de fração por exigir interpretações sutis e abstrusas, principalmente quando o numerador do divisor for diferente de um (1).

Sendo assim, apresentamos $\frac{2}{3}:\frac{3}{5}$ para que eles determinassem a fração quociente, via a definição. O primeiro passo foi realizar a operação inversa e trocando os papéis dos termos da segunda fração, resultando em $\frac{2}{3}.\frac{5}{3} = \frac{10}{9}$. Traçaram um segmento de 9 cm e dividiram 3 partes iguais, obviamente de 3 cm cada, correspondendo a $\frac{1}{3}$.

Como a fração multiplicadora era $\frac{5}{3}$, cada terço da primeira divisão foi subdividido em terços novamente, tendo como resultado a fração-todo em $\frac{2}{9}$. Teríamos agora que tomar 5 vezes cada $\frac{2}{9}$, ou seja, $\frac{5.2}{9} = \frac{10}{9}$.

Geometricamente, foi necessário tomar mais uma unidade inteira de 9 cm, pois a fração produto é uma fração própria, ou seja, maior que um inteiro. Aritmeticamente, escrevemos: $\frac{10}{9} = \frac{9}{9} + \frac{1}{9} = 1\frac{1}{9}$.

A comprovação geométrica de $\frac{2}{3}:\frac{3}{5}$ a partir da idéia de divisão – quantas vezes o três quintos cabem em dois terços - sem prévia transformação em multiplicação, foi apresentada da seguinte maneira:

Traçamos um segmento de 15 cm e dividimos em três partes iguais, ou seja, de 5 cm cada e tomamos duas partes (partes em vermelho - figura 3).

Figura 3

Em seguida, a fração divisor $\frac{3}{5}$, foi obtida dividindo o segmento todo em quintos, que equivale a 3 cm cada parte, tomamos três (partes em verde– figura 4).

Figura 4

Seguindo a pergunta-guia, verificamos por comparação quantas vezes a medida do segmento $\frac{3}{5}$ cabe na medida do segmento $\frac{2}{3}$ (Figura 5).

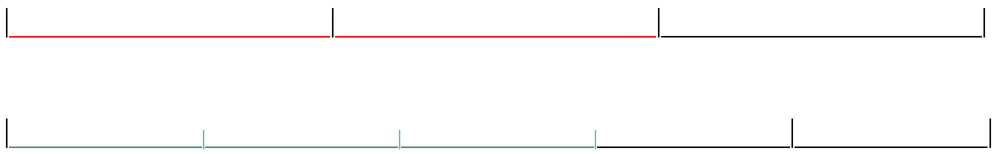

Figura 5

Alguns alunos perceberam que a medida $\frac{3}{5}$ cabia: *uma vez inteira e mais um pouco*. Foi justamente para explicar qual fração representava aquele "pouco", que retomamos ao resultado obtido anteriormente pela definição, o quociente $\frac{10}{9}$, ou seja, $\frac{10}{9}$ representa uma (1) vez inteira o $\frac{3}{5}$ e mais $\frac{1}{9}$ de vez: $\frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

A questão que se apresentava era demonstrar a medida $\frac{1}{9}$ no segmento de reta para o aluno, o que não fizemos por justificativa já apresentada. Porém, seria possível: transformando, inicialmente, as frações em equivalentes de mesmo denominador: $\frac{10}{15} : \frac{9}{15}$. Em seguida, traçam-se dois segmentos-unidade fazendo a representação de cada uma dessas frações, conforme figura 6.

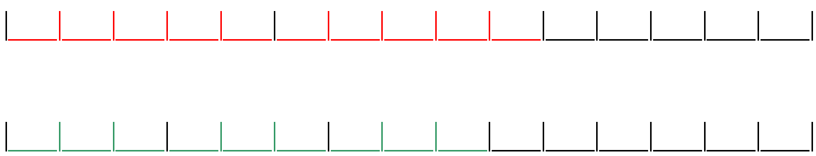

Figura 6

Posteriormente, faz-se a verificação de quantas vezes nove quinze avos cabem em dez quinze avos. Estabelecida a comparação, é possível observar que nove quinze avos cabem uma vez inteira (que corresponde a nove nonos dessa vez inteira) em dez quinze avos e mais uma pequena parte equivalente a um nono da vez inteira.

Das atividades desenvolvidas foram extraídas as sínteses da operação de divisão de números racionais: a) com dividendo e divisor fracionário, se muda a operação para multiplicação e se inverte a segunda fração, em razão de o denominador do divisor ter como função aumentar a quantidade numérica do dividendo para obter como resultado um quociente, tantas vezes maior quanto esse indicar; b) a idéia básica é verificar quantas vezes o divisor cabe no dividendo, transformando-se as frações em equivalentes de mesmo denominador e comparam-se as novas frações verificando quantas vezes o divisor é parcela do dividendo.

Embora, por definição–síntese, a divisão até se torna atrativa e curiosa para alguns alunos pelo fato de se transformar na multiplicação, mesmo assim, ainda é desafiadora quando se quer fazer a interpretação geométrica.

Considerações Finais

O trabalho com os alunos exigiu muito esforço, no sentido de dar ênfase às relações conceituais em cada proposição a ser resolvida, de forma que eles desenvolvessem uma lógica de pensamento de cada especificidade ou significações concernentes ao conceito. Isso reivindica que, ao propor uma nova atividade, a atenção se redobre para manter a consistência pré-estabelecida com base na categoria lógico-histórica.

No caso específico do conceito de número racional, o lógico-histórico tem como referência a idéia de medida, se estende para a propriedade de equivalência e atinge um nível de complexidade cada vez maior em cada operação – adição, subtração, multiplicação e divisão – fazendo com que a literatura (Caraça) abandone a representação geométrica na multiplicação e divisão, recorrendo exclusivamente à síntese algébrica e aritmética.

A atenção também se volta para dois focos de manifestações: de cada aluno e do grupo como todo. O acompanhamento individual é uma necessidade para aqueles alunos que, desde a primeira atividade, apresentam dificuldades. Muitas delas vão sendo superadas com o desenvolvimento de novas situações de aprendizagem no decorrer da pesquisa. Para um aluno, elas se alastraram até o final e permaneceram à mercê de um trabalho de continuidade e atenção exclusiva do professor ou dos colegas com nível de compreensão conceitual. Seu pensamento sincrético tem um predomínio em relação ao pensamento analítico e sintético, apontando para as suas possibilidades de elaboração conceitual – zona de desenvolvimento próximo – por isso, ainda de forma dependente de mediações sociais. A ajuda se deu desde o manuseio da régua para traçar os segmentos de reta, resolução de operações simples de multiplicação e divisão e transposição dos resultados para a representação geométrica, até as relações interpretativas que levariam à síntese aritmética e algébrica.

Por sua vez, a atenção para o grupo todo visava trazer evidências das regularidades de procedimentos e pensamentos no momento de apresentação e discussões de cada atividade. Foram dessas observações que percebemos um movimento entre o sincrético ponto de partida da representação geométrica ao sintético ponto de chegada. Isso necessitou de ajuda para a própria construção do segmento, passando pelo processo analítico - estabelecer relações num único segmento e entre dois deles, fazer identificações, traduzir para a representação escrita, resgatar propriedades e conceitos anteriormente aprendidos, atribuir significado e função aos termos – atingindo a síntese algébrica.

O pensamento sintético se revelava quando, ao propormos uma operação – divisão - os alunos buscavam seu resultado quer por vias da definição como também por representação geométrica com as devidas interpretações.

Apresentar uma seqüência de ensino em que se confluem as categorias e conceitos da abordagem Histórico-Cultural (lógico-histórica, abstrato-concreto, sincrético-analítico-sintético) para o processo de desenvolvimento do conceito de números racionais não significa que torne mais "fácil" a aprendizagem. Pelo contrário, exige do aluno operações mentais complexas, distintas daquelas realizadas diariamente e no ensino convencional.

Diante do exposto, nessas considerações finais, pensamos que a seqüência de ensino defendida no presente estudo oportunizou o desenvolvimento do pensamento conceitual de divisão de Números Racionais pelos alunos, dentro dos limites a que se propôs.

Referências

BÉZOUT, Etienne M. **Elementos de arithmetica**. Coimbra: Livraria Portuguesa, 1849.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 2003.

DAMAZIO, Ademir. **O desenvolvimento dos conceitos matemáticos no contexto do processo extrativo do carvão.** Tese de Doutorado – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

DUARTE, Newton. **A Relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1987.

______, Newton. **A individualidade para-si:** contribuição a uma teoria histórico-social da formação do indivíduo. Campinas, SP: Autores Associados, 1993.

FIORENTINI, Dario. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. In: **Zetetiké**. Campinas: UNICAMP, ano 3, n.4, 1995. p. 1-36.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. **Matemática escolar e matemática do cotidiano**.Campinas, SP: Autores Associados, 1999.

____________, José Roberto Boettger . **A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da geometria analítica a nível de 1° e 2° graus**. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1991.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

______. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

______. **Psicologia pedagógica**. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

_________. **Obras Escogidas IV:** Incluye paidologia del adolescente, problemas de la psicologia infantil. Madrid: Visor Distribuciones, 1996.