ESTUDO DE MOMENTOS DIDÁTICOS DE PROFESSORES DURANTE A ELABORAÇÃO DE UMA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA SOBRE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

SILVA, Maria José Ferreira da – PUC-SP – zezé@pucsp.br
GT: Educação Matemática / n.19
Agência Financiadora: CEPE / PUC-SP

Introdução

Nosso interesse pelo ensino e aprendizagem de números fracionários vem de algum tempo, mas a publicação dos resultados do SARESP de 1995 nos confirma a importância de estudos a respeito desse tema, primeiro, por deixar clara a importância de seu ensino quando afirma que:

> As frações geralmente introduzidas na terceira série são trabalhadas até a última série do primeiro grau, sendo que, nas duas últimas numa abordagem algébrica. Entretanto, um número significativo de pessoas considera que sua importância é superestimada nos currículos. [...] A proposta curricular reserva um lugar muito especial para a fração [...] sua inclusão levou em conta que este tema além de fazer parte de um acervo cultural básico, é fundamental para o desenvolvimento de outros assuntos essenciais dentro e fora da Matemática. (SARESP, 1995, p. 97).

Complementam tal sugestão trazendo para os professores das séries iniciais a responsabilidade sobre as experiências com essas interpretações (parte-todo, quociente, razão e operador) esperando que o aluno ao chegar à quinta série já domine o conceito de frações, além de suas representações, operações, e aplicação em resolução de problemas. (SARESP, 1995, p. 97).

Tais recomendações nos mostram, a princípio, que os alunos de quinta série já construíram parte do conceito de números fracionários e estariam aptos a solucionar problemas que solicitam a mobilização de tal número enquanto parte-todo, quociente, razão e operador. Por outro lado, nos leva a perguntar se os professores de matemática, principalmente os que atuam na quinta-série, estão preparados para essa construção, caso os alunos não cheguem como o esperado.

As preocupações com o ensino de números fracionários não são recentes. Já em 1964 Madeleine Goutard, baseada em suas observações em aula e em experiências com crianças, alerta para a necessidade de diversos pontos de vista para esse ensino quando afirma que:

> As frações não são algo que se tenha que saber, mas sim algo que se tenha que compreender, e não é possível compreendê-las antes de ter uma suficiente experiência com elas. [...] A chave do êxito na iniciação ao estudo das frações é a variedade, a troca, a diversidade de pontos de vista. (GOUTARD, 1964 apud Garcia, 2003, p. 18).

Planejou-se então uma formação para um grupo de professores de Matemática, a fim de observar o tratamento que daria ao ensino de números fracionários e as concepções mobilizadas. Além disso, durante as fases anteriores a esse projeto nos questionávamos a respeito de uma metodologia de formação continuada que possibilitasse a esses professores organizar situações que aperfeiçoassem as condições de aprendizagem de seus alunos. Decidimos que o melhor caminho seria o grupo de professores elaborar uma seqüência para o ensino dos números fracionários para uma quinta série.

Quadro teórico

Para organizar a formação e observar as concepções[1] mobilizadas, além do tratamento que esse grupo de professores daria para o ensino desse conteúdo para uma quinta série, nos baseamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD). De acordo com Chevallard (1999) o papel do professor pode ser expresso em termos de *tipos de tarefas* (T) acompanhadas ao menos de uma certa maneira de fazer ou *técnica* () que associadas definem um saber-fazer. Esse bloco sobrevive respaldado por um ambiente tecnológico-teórico (ou saber) formado por uma *tecnologia* (discurso que busca justificar e tornar inteligível a técnica) e uma teoria que justifica e esclarece essa tecnologia. Esse sistema, de acordo com o autor, constitui uma organização praxeológica (ou praxeologia) que articula um bloco prático-técnico (saber-fazer) e um bloco tecnológico-teórico (saber).

O sistema de tarefas do professor deixa transparecer dois grandes componentes, de acordo com Chevallard (1997): as organizações matemáticas e as organizações didáticas. A primeira é uma organização praxeológica matemática que se constitui em torno de um ou mais tipos de tarefas matemáticas, mais ou menos bem identificadas, que solicitam a mobilização de uma ou mais técnicas matemáticas, mais ou menos

---

[1] Adotamos o termo *concepção* segundo Artigue (1990, p. 274) que a define como um objeto local, estreitamente associado ao saber em jogo e aos diferentes problemas em cuja resolução intervém.

adaptadas e mais ou menos justificadas por tecnologias matemáticas mais ou menos sólidas, desenvolvidas no quadro de uma teoria matemática mais ou menos explícita.

Assim, para o autor, uma das tarefas essenciais dos professores consiste em determinar, a partir dos programas oficiais, as *organizações matemáticas* que devem ser estudadas determinando para cada uma delas seu conteúdo, os tipos de tarefa matemática que contém e ainda o grau de desenvolvimento que deve ser dado aos componentes técnico, tecnológico e teórico. Outra atividade do professor é conduzir a reconstrução desta organização matemática na classe, por meio de uma organização didática.

Para Chevallard (1999) qualquer que seja o caminho de estudo seguido, para a elaboração dessa organização didática, constata-se que certos tipos de situações estão sempre presentes, de maneira variável, tanto no plano qualitativo, quanto no quantitativo. A esses tipos de situações o autor denomina *Momentos de Estudo ou Momentos Didáticos* e acrescenta:

> A maneira como uma determinada Organização Didática coloca em prática certa Organização Matemática pode ser analisada primeiramente, interrogando a maneira como são realizados os diferentes momentos do estudo. (CHEVALLARD, 2002, p. 12, tradução nossa).

O primeiro momento do estudo, de acordo com Chevallard (1999), é o primeiro encontro com a organização que está em jogo. O segundo momento é o da exploração do tipo de tarefas e da elaboração de uma técnica relativa a esse tipo. O terceiro é o da constituição do entorno tecnológico-teórico relativo às técnicas exploradas anteriormente. O quarto momento é o do trabalho da técnica que deve torná-la mais eficaz e mais confiável (o que exige retocar a tecnologia elaborada até então). O quinto momento é o da institucionalização, que tem por objeto determinar o que é "exatamente" a organização matemática elaborada, distinguindo os elementos que entrarão definitivamente na organização matemática e os que não se integrarão. Finalmente, o sexto momento, é o da avaliação, que se articula com o momento da institucionalização e como elemento reformador, permite relançar o estudo, suscitar a reposição de algum momento e talvez, do conjunto do trajeto didático.

Estudo da organização matemática

Para subsidiar a própria formação e as análises da produção dos professores, de acordo com a TAD, três estudos a respeito de números fracionários foram realizados. O primeiro diz respeito à terminologia utilizada para identificar o objeto matemático em estudo e seus significados, que se justifica pela imprecisão da utilização dos termos: fração, número fracionário e número racional. Para Alphonse (1995) o número fracionário é representado por uma classe de frações e a razão não é número, mas uma relação entre dois números inteiros embora possa ser representada na forma de fração. Já para Niven (1984) a divisão de inteiros pode produzir frações que formam o conjunto dos racionais, embora os termos número racional e fração ordinária sejam, às vezes, usados como sinônimos. Para ele a palavra fração sozinha é usada para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador e, portanto, fração ordinária é um número racional e fração é uma representação.

Esse estudo nos levou a buscar distinguir o objeto de suas diferentes representações e, de adotar um termo que não deixe dúvidas e seja suficientemente abrangente. Optamos por utilizar o termo **número fracionário** para indicar o número que pode ser representado por uma classe de frações, com e a, b pertencentes a um anel de integridade. Como, neste trabalho, estamos interessados no Ensino Fundamental, a e b podem ser números reais ou polinômios. Assim, trataremos por número fracionário todo elemento do conjunto dos números reais ou do conjunto dos polinômios que podem ser representados por uma classe de frações.

Em nosso segundo estudo buscamos a gênese do número fracionário nos apoiando em Artigue (1990), para quem a análise epistemológica, ancorada no desenvolvimento histórico do conceito, conduz o pesquisador a diferenciar uma variedade de concepções sobre um dado objeto e a reagrupá-los em classes pertinentes para a análise didática. Para esse estudo utilizamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) que situa a atividade matemática em um conjunto de atividades humanas em instituições sociais que produzem, utilizam ou ensinam tal saber como resultado da ação humana. E, nos apoiamos em Schubring (2003), quando afirma que há evidência da existência do ensino institucionalizado de matemática na Mesopotâmia e que tanto os Papiros de Rhind e de Moscou quanto os “Dez manuais matemáticos” da China são textos destinados ao ensino.

Tal estudo nos mostrou que o ensino de números fracionários, em sua gênese, apresenta tanto a concepção de operador quanto a concepção parte-todo associadas à resolução de tarefas que solicitam a mobilização da concepção de medida, quociente e razão. A concepção parte-todo da forma como é utilizada atualmente, desvinculada da submissão a outras concepções, é orientação recente do ensino e mobilizada em tipos de tarefas que não aparecem nos primórdios da construção do campo dos números fracionários. Com os resultados desse estudo elaboramos o esquema abaixo que mostra as necessidades que permitiram a gênese dos números fracionários.

Percebemos que tanto as necessidades de medir, distribuir e comparar quanto a de buscar soluções para essas necessidades e registrá-las apresentaram-se simultaneamente na Antiguidade e conduziram à necessidade de seu ensino.

As tarefas utilizadas para tal fim enfatizavam o cálculo com números fracionários e a descoberta de valores desconhecidos relacionando as concepções de medida, quociente e razão entre si e estas às concepções parte-todo e operador.

Esse estudo epistemológico nos mostrou ainda que os tipos de tarefas que solicitam a mobilização da concepção de medida associada às concepções parte-todo, razão e operador permite a construção do conhecimento de medida relacionado aos números fracionários. Da mesma forma os tipos de tarefa que mobilizam a concepção de quociente e de razão permitem construir os conhecimentos de comparação e distribuição relacionados a esses números. Os conhecimentos de medida, comparação e distribuição permitem identificar a razão de ser desses números que relacionados facilitariam a construção do conceito de número racional mais à frente.

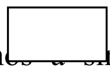
Em nosso terceiro estudo elaboramos uma Organização Matemática para os números fracionários voltada para a quinta série do Ensino Fundamental, com o objetivo de utilizar alguns resultados de pesquisa durante a formação dos professores. Apresentamos a seguir alguns quadros que sintetizam os tipos de tarefas que solicitam a mobilização das concepções parte-todo, quociente e medida, seguidos de alguns exemplos. O primeiro deles refere-se à concepção parte-todo.

Tipo de tarefas	**Concepção parte/todo**	**Grandeza**	**Técnicas**
1º	Relacionar à uma figura um número fracionário	Contínua	1) Dupla contagem das partes. 2) Medida e dupla contagem. 3) Perceber equivalência entre parte pintada e não pintada 4) Perceber a equivalência entre as partes pintadas. 5) Medida e equivalência de áreas 6) Medida e reconfiguração 7) Medida e reconfiguração ou razão entre medidas de área 8) Cálculo de medidas de área e razão entre elas. 9) Escolha de malha quadrangular para aproximação da medida de área
		Discreta	Dupla contagem das partes
2º	Identificar um número fracionário dado em uma figura	Contínua	Dividir a figura sem associar a medida. Dividir a figura associando a medida Decomposição de figura

		Discreta	Contagem e divisão
3º	Compor inteiros e determinar fracionário	Contínua	Relaciona as partes que compõem a figura e identificar o fracionário da parte solicitada
		Discreta	Dupla contagem
4º	Reconstituição do inteiro	Contínua	Composição de figuras, a partir da parte apresentada
		Discreta	Reversibilidade: dividir a quantidade da parte dada pelo numerador e o resultado pelo denominador

Como exemplo, apresentamos o tipo de tarefa reconstituição do inteiro, que permite a mobilização da reversibilidade da dupla contagem das partes. Se para obter um terço de uma figura, dividimos em três partes de mesma área, então, quando apenas uma dessas partes for apresentada será necessário percorrer o caminho de volta, isto é obter uma figura com três partes congruentes à figura dada para alcançar o inteiro. Em situações deste tipo podemos encontrar diferentes figuras como soluções.

Tarefa 1: *Se a figura abaixo é um terço do inteiro, desenhe o inteiro.*



A seguir apresentamos a síntese dos tipos de tarefas que compõem nossa organização matemática relacionados à concepção de quociente.

Tipo de tarefas	**Concepção de Quociente**	**Grandeza**	**Técnicas**

1º	Distribuir igualmente x objetos em um número y de partes	Contínua	1º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes ou manter objetos inteiros e dividir só o que for necessário 2º caso: dividir todos os objetos em y partes e considerar x dessas partes
		Discreta	Divisão de naturais
2º	Distribuir igualmente x objetos em uma determinada cota.	Contínua	Dividir a quantidade de objetos pela cota dada
		Discreta	Divisão de naturais

Como exemplo, apresentamos uma tarefa do primeiro tipo:

Tarefa 1: *Quanto cada pessoa receberá de pizza se distribuirmos igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas.*

Para solucionar este problema identificamos duas técnicas que a cumpre satisfatoriamente e requer a mobilização conjunta da concepção parte-todo. Na primeira, dividimos cada pizza em quatro partes iguais e concluir que cada pessoa receberá 5/4 de pizza. Mas, a divisão de todas as pizzas, em quatro partes, poderia levar o sujeito a considerar em uma ação de discretização do continuo que permite utilizar a operação com naturais e nem sempre a identificação do fracionário em jogo.