RE-SIGNIFICANDO A DISCIPLINA TEORIA DOS NÚMEROS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA LICENCIATURA

RESENDE, Marilene Ribeiro[1] – PUC-SP / UNIUBE – marilene.resende @uol.com.br
GT: Educação Matemática / n.19
Agência Financiadora: Sem Financiamento

1. Introdução

Neste trabalho, tomamos como objeto de estudo um saber matemático, a Teoria dos Números, e procuramos desvelar, a partir de algumas fontes, como esse saber que tem raízes históricas e que se constitui num campo efervescente na matemática ainda hoje, é ou poderia ser concebido como um *saber a ensinar* na licenciatura em matemática, visando à formação do professor que irá atuar no Ensino Fundamental e Médio.

A partir da nossa experiência como professora da escola básica e da licenciatura, pudemos constatar, ao longo de nossa trajetória, que, embora o estudo dos números, principalmente o dos inteiros, ocupe grande parte do currículo de matemática da escola básica, parece não merecer na licenciatura um tratamento que corresponda às demandas que o ensino desse tema apresenta ao professor na docência, nesses níveis. O domínio do discreto sempre esteve presente na vida do homem, assim como o domínio do contínuo. No entanto este último sempre teve um lugar de destaque nos currículos da licenciatura, enquanto campos como a Teoria dos Números, a Matemática Discreta nem sempre aparecem explicitamente como conteúdos a ensinar durante o processo inicial de formação de professores.

Por outro lado, os PCN, ao estabeleceram diretrizes para o ensino de matemática na escola básica, têm destacado o estudo dos números, inclusive como um bloco de conteúdos, mas a análise do documento permite perceber que há questões subjacentes às idéias ali apresentadas que estão a demandar mais pesquisas, como é o caso das visões de álgebra presentes nos documentos e na prática; discussão dos aspectos caracterizadores do conjunto dos inteiros e o seu ensino e aprendizagem; as relações álgebra e aritmética, pensamento algébrico e pensamento aritmético; enfim, qual a álgebra a ser ensinada.

Deste modo, a nossa preocupação neste trabalho se situa no campo da educação algébrica, em que se questiona qual a álgebra a ser ensinada nos diferentes níveis da

[1] Tese defendida no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, sob a orientação da profa. Dra. Sílvia Dias Alcântara Machado, em 2007.

escolaridade. Como também se insere no campo da formação de professores no que diz respeito aos saberes específicos que devem fazer parte do currículo da licenciatura, tema de estudo ainda pouco explorado na Educação Matemática.

Assim, após delimitações que se fizeram necessárias, definimos a questão geradora desta pesquisa: *Qual Teoria dos Números é ou poderia ser concebida como um saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando a prática docente na escola básica?* Outras questões foram levantadas para nortear o estudo:

- *Qual Teoria dos Números tem sido ensinada na licenciatura em matemática, em algumas universidades brasileiras, atualmente?*
- *Como professores e pesquisadores em Teoria dos Números e em Educação Matemática concebem a Teoria dos Números e o seu ensino?*
- *Qual Teoria dos Números poderia ser concebida como saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando a formação do professor na escola básica?*

Assim, este estudo se situa na esfera do compreender. Como há várias concepções a respeito dessa forma de conhecimento, consideramos importante esclarecer o significado que será adotado neste trabalho. No *Dicionário de Filosofia* de Abbagnano (2003), o compreender é colocado como uma atividade cognoscitiva específica, diferente do conhecimento racional e de suas técnicas explicativas, tanto na filosofia medieval, como na filosofia contemporânea, embora por razões diferentes. Morin (1999), no entanto, afirma que as noções de compreensão e de explicação, numa primeira análise, parecem justapor-se, mas a relação compreensão/explicação comporta uma complementaridade não menos fundamental que a sua oposição, o que faz evocar a configuração em *yin-yang*. Para Morin, a compreensão é um modo fundamental de conhecimento que busca captar os significados de uma situação ou fenômeno, movendo-se na esfera do concreto, da intuição global, do subjetivo, enquanto a explicação move-se na esfera do lógico, do analítico, do objetivo. A compreensão inclui, portanto, subjetividade, sentimentos, pensamentos, finalidades e relação com os valores, por isso *comporta limites e riscos de erro, inclusive o risco da incompreensão, pois uma compreensão só pode compreender o que compreende...* . Isso indica que a compreensão deve ser combinada com procedimentos de verificação, isto é, deve haver uma relação dialógica entre compreensão e explicação (MORIN, 1999, p.158).

Assim, este estudo tem como objetivos:

- compreender a Teoria dos Números, enquanto um *saber a ensinar* voltado para a formação do professor da escola básica, nos cursos de licenciatura em matemática;
- buscar elementos e possibilidades para re-significar a Teoria dos Números na formação do professor de matemática da escola básica, concebendo um conjunto de conhecimentos em Teoria dos Números, necessário para fundamentar a Aritmética e a Álgebra a ser ensinada naquele nível e que possibilite o desenvolvimento de idéias matemáticas “relevantes”.

A nossa assunção é de que a Teoria dos Números deve ser parte essencial da formação matemática na licenciatura, porque proporciona ao futuro professor e ao aluno da escola básica o desenvolvimento de idéias matemáticas relevantes. Certamente, para isso devem ser buscados elementos que a caracterizem como uma disciplina a ensinar, inserida num projeto pedagógico de formação do professor de matemática da escola básica.

Buscamos referenciais teóricos que pudessem clarear a relação entre saber científico, saber a ensinar e saber ensinado, e, conseqüentemente, as relações entre as disciplinas científicas, as acadêmicas e as escolares, pois a nossa preocupação é com a Teoria dos Números enquanto saber a ensinar, reconhecendo que esta guarda relações com o saber científico referente ao campo. Assim, fundamentamo-nos na teoria da transposição didática de Chevallard para considerar que os saberes a ensinar não se confundem com os saberes científicos nem são meras adaptações didáticas destes. São, sim, criações didáticas que têm objetivos próprios e espaços de significações diferentes, frutos de processos de descontextualizaçao, de despersonalização e de desincretização, o que lhes garante um estatuto epistemológico próprio.

Ainda com base em Perrenoud (2000) e Lopes e Macedo (2002), concebemos, neste estudo, as disciplinas acadêmicas universitárias, como instituições sociais, frutos de uma negociação, e não, apenas, recortes de um campo científico transposto para o ensino, referindo-se, assim, a um campo complexo de saberes e de práticas e com uma legitimidade própria. Assim, são consideradas como um conjunto de: conteúdos, frutos de uma transposição didática; práticas, finalidades, elementos pedagógicos e de outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral, organizados de modo a manter uma unidade científica e didática.

Como a disciplina que estamos tomando como objeto de estudo insere-se num currículo de formação de professores, adotamos o modelo de Shulman para tratar os saberes dos professores: *saber do conteúdo específico, saber pedagógico do conteúdo* e *saber curricular.* Preocupamo-nos em observar, particularmente, a segunda categoria, pois entendemos que no processo de formação de professores o pedagógico não pode se separar do conteúdo, assim como teoria não deve se dissociar da prática, em especial da prática docente na escola básica.

Para buscar responder as questões levantadas, numa abordagem qualitativa, utilizamos, como estratégias metodológicas, a pesquisa documental às propostas curriculares dos cursos de licenciatura de matemática de doze universidades brasileiras, tendo como foco os conteúdos de Teoria dos Números; a pesquisa a dez livros didáticos indicados nas propostas curriculares, divididos em dois grupos para a análise; e, ainda, a entrevista semi-estruturada com sete professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou em Educação Matemática. Para a análise dos dados, utilizamos a *análise de conteúdo,* conforme caracterizada por Lüdke & André (1986), Laville & Dionne (1999) e Bardin (1977).

Apresentaremos, em seguida, de forma concisa, os resultados, em função das questões levantadas. Como já abordamos anteriormente, a busca de compreensão não é neutra, traz marcas do subjetivo, daí a necessidade da relação dialógica entre o compreender e a busca da explicação que buscamos nos dados e nos referenciais teóricos, procurando olhar o objeto de estudo em suas múltiplas relações e significados.

2. Qual Teoria dos Números tem sido ensinada em algumas universidades brasileiras, atualmente?

A análise das propostas curriculares de disciplinas que contêm tópicos de Teoria dos Números, a análise dos livros didáticos e algumas falas dos entrevistados nos permitem concluir que a concepção de Teoria dos Números, subjacente, é, com algumas exceções, *formalista,* isto é, os conhecimentos matemáticos são construídos de forma lógica dedutiva, a partir de alguns conceitos primitivos e de algumas proposições consideradas verdadeiras (axiomas). Conseqüentemente a abordagem dos conteúdos é também axiomática, numa linguagem predominantemente simbólico-formal, com ênfase nas demonstrações, o que nos permite inferir, com base nos objetivos e nos conteúdos propostos e nos livros didáticos, que são notas de aulas, que o ensino desta disciplina pode ser enquadrado, de acordo com Fiorentini (1995), na *tendência formalista clássica,* em que a ênfase é colocada na forma e não no significado dos conteúdos tratados. Deste modo, o ensino tende a ser expositivo, livresco, centrado no professor, sendo a aprendizagem resultante da repetição de inúmeros exercícios, no caso demonstrações de proposições que, já se sabe, são verdadeiras. A significação histórico-cultural, a investigação matemática, o conjecturar ficam relegados a segundo plano ou não aparecem.

Assim, podemos concluir que a Teoria dos Números tratada na maioria das universidades pesquisadas não tem a preocupação com a formação do professor da escola básica, apesar de os projetos pedagógicos dos cursos apresentarem claramente que o objetivo da licenciatura é a formação do professor para esse nível, apresentando, inclusive, listas de competências a serem atingidas. Os conteúdos de Teoria dos Números são tratados em disciplinas com denominações diversificadas, o que, no nosso modo de ver, revela concepções de matemática e de ensino e uma falta de clareza do papel desta área na formação do professor, além de definir ênfases que serão dadas no tratamento dos conteúdos. Revela, ainda, que os aspectos próprios dos números inteiros que interessariam ao futuro professor, pois estão presentes na escola básica, não são enfatizados ou não são tratados com a finalidade de preparar alguém para ensiná-los. Deste modo, percebe-se que não há uma ponte entre o conhecimento "novo" trabalhado na disciplina acadêmica e o conhecimento "antigo", trabalhado na escola básica, e, como conseqüência, o distanciamento entre a formação e a prática docente.

Os objetivos para as disciplinas que contêm elementos de Teoria dos Números nem sempre são apresentados e, quando o são, visam ao ensino da matemática pela matemática, enfatizando a familiaridade com o método axiomático. Em apenas três instituições, os objetivos são mais amplos, incluindo comportamentos, valores, competências e habilidades a serem desenvolvidas, visando à formação do professor.

Quanto aos conteúdos, há um núcleo que é comum aos currículos pesquisados, embora haja uma diversidade de tópicos, com programas geralmente extensos, o que pode dificultar atividades que exijam uma participação maior do aluno, como protagonista do processo de ensino, o que, certamente, demanda um tempo maior. Em todos os programas e livros didáticos estão presentes o estudo da divisibilidade, o algoritmo da divisão euclidiana, o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum, os números primos, o teorema fundamental da aritmética, congruências e equações diofantinas lineares. Pelo que foi apresentado, podemos inferir que os números inteiros são considerados “dados”, sendo as operações e propriedades tomadas como axiomas, o que distancia esse estudo das demandas colocadas por este tema na escola básica, conforme apontado por Moreira (2004).

A bibliografia indicada inclui obras que não estão sendo mais publicadas ou que têm edições esgotadas, além de muitos livros em língua estrangeira, principalmente em inglês. Podemos afirmar que não temos obras cuja abordagem tenha como objetivo a formação de professores, exceto uma das analisadas, o que confirma o apontado por um dos entrevistados, ao afirmar que, em nível mundial, não há uma preocupação em tornar a Teoria dos Números ensinável, isto é, falta um processo de transposição didática adequado e a incorporação de elementos pedagógicos do conteúdo, conforme proposto por Shulman.

Com relação, ainda, aos livros didáticos que são em sua maioria resultados de notas de aulas, há nesses uma forte predominância de tarefas do tipo demonstrar. Embora reconheçamos que a Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, é *locus* propício para a demonstração e também para a prova, entendemos que esses constituem um momento do fazer matemático. Assim, outros tipos de atividades poderiam estar presentes, como a investigação matemática, o conjecturar, o generalizar, o testar a veracidade de uma proposição. Além disso, há que se considerar toda a discussão em torno da prova que vem sendo travada no âmbito da Educação Matemática.

Concluindo, podemos afirmar que as disciplinas que tratam de Teoria dos Números ensinadas na licenciatura em matemática em algumas universidades brasileiras, atualmente, abordam os conteúdos e práticas na perspectiva da matemática acadêmica, carecendo de um trabalho de transposição didática que vise à formação do professor de matemática da escola básica e de um tratamento pedagógico do conteúdo que permita que o seu potencial na formação do professor possa ser explorado.

3. Como professores e pesquisadores em Teoria dos Números e em Educação Matemática concebem a Teoria dos Números e o seu ensino?

Todos os pesquisadores entrevistados concebem a Teoria dos Números como uma área que tem um papel central na matemática e que deveria ter um papel de maior destaque no ensino, pois tem um caráter de fundamentos, considerando que os números naturais, inicialmente, e depois os inteiros estão na base da construção do conhecimento matemático. Destacam que questões relacionadas aos números, resultantes da curiosidade humana e de necessidades de diferentes ordens (econômicas, sociais, culturais, de lazer, de explicação do mundo) foram e continuam sendo fonte de inspiração para o desenvolvimento da matemática.

Além disso, no ensino, a idéia de fundamentos remete, de um ponto de vista cognitivo, à concepção de que a construção de novas aprendizagens se faz ancorada em aprendizagens anteriores. Assim, o estudo dos números naturais nas séries iniciais e depois o dos inteiros permitem desenvolver elementos conceituais que servirão de base para outras aprendizagens.

Os pesquisadores entrevistados destacam, ainda, os aspectos históricos, culturais e estéticos da Teoria dos Números, os quais permitem colocar a matemática no contexto da civilização humana, pois a aritmética esteve sempre presente na história de cada povo, inserida nos seus modos de produção e de pensar. Ainda hoje, as experiências de quantificação de objetos e fenômenos continuam a fazer parte da vida prática das pessoas.

Outro aspecto enfatizado pelos pesquisadores é a possibilidade de que o estudo de temas ligados à Teoria dos Números promova o desenvolvimento de competências e habilidades, como a capacidade de demonstrar, de argumentar, de conjecturar, de generalizar, de investigar. Com relação às demonstrações formais, contudo, não há consenso, pois alguns dos entrevistados consideram a abordagem axiomática "engessante", enquanto outros a concebem como "o modo" de fazer matemática.

Alguns dos entrevistados lembram que o estudo dos números inteiros tem uma forte presença na educação básica de todas as nações, o que justifica a sua presença nos cursos de licenciatura, não como revisão ou forma de suprir possíveis falhas da escolaridade anterior, mas como oportunidade para aprofundar e ampliar os conceitos, como também de construir o conhecimento pedagógico do conteúdo. Essas considerações permitem inferir potencialidades para o estudo de assuntos ligados à Teoria dos Números na escola básica, como também justificar e estabelecer objetivos para a Teoria dos Números enquanto disciplina acadêmica, inserida no conjunto das disciplinas específicas de formação do professor de matemática da escola básica.

Com relação à Teoria dos Números, enquanto saber científico, os pesquisadores a concebem como o estudo dos números inteiros e de suas propriedades, utilizando ferramentas de outros campos da matemática para resolver os seus problemas, como da Álgebra, da Análise e da Geometria.

Concordam que a Teoria dos Números tem intersecção com a álgebra, mas não se trata de inclusão, pois cada um destes campos tem problemas próprios. Alguns chegam a compreender a Teoria Elementar dos Números ou o anel dos inteiros como a intersecção entre eles. A álgebra é vista como Álgebra Moderna, ou seja, o estudo das estruturas algébricas, sendo o conjunto dos inteiros o exemplo natural de algumas dessas estruturas. Essa concepção explica o porquê de muitos currículos incluírem o estudo dos inteiros em disciplinas que têm o nome álgebra.

Com relação à aritmética e Teoria dos Números, as concepções não são muito claras. Para alguns, a aritmética parece estar ligada ao que é elementar, como o "fazer contas", ao operar com números, às suas representações e aos problemas de contagem, enquanto para outros a Teoria dos Números é Aritmética Superior.

No que diz respeito ao ensino da aritmética e da álgebra na escola básica, alguns pesquisadores destacam a importância de não separar a educação aritmética da educação algébrica, compreendendo-as como imbricadas, de um modo mais amplo, que não se reduz à linguagem, mas apontando para o que poderíamos considerar uma relação dialética entre pensamento e linguagem.

Podem ser considerados como temas centrais em Teoria dos Números, na visão dos entrevistados, a questão da divisibilidade e os problemas relacionados aos números primos. Quanto ao seu ensino, três tipos de abordagens emergem dos discursos dos entrevistados: a abordagem axiomática, defendida como forma de fazer matemática, principalmente pelos pesquisadores em matemática ; a abordagem investigativa, apresentada como mais próxima do fazer matemático visto como processo; e as abordagens histórica e epistemológica, consideradas importantes na formação do professor, defendidas pelos educadores matemáticos.

Concluindo, podemos identificar, no discurso dos entrevistados, concepções diferentes de Teoria dos Números enquanto saber a ensinar, resultantes de concepções diversas da matemática e de seu ensino. Para alguns, a definição da disciplina acadêmica se dá em função de valores que as pessoas envolvidas com matemática são capazes de enxergar, independentes dos objetivos do curso em que a disciplina está inserida e da consideração de que no sistema didático há um elemento importante, que é o aprendiz. Outros foram enfáticos em defender abordagens diversas, como a investigativa, a histórica e a epistemológica, certamente pensando no conhecimento pedagógico do conteúdo. São diferentes olhares que indicam que as disciplinas devam ser fruto da negociação na noosfera e nos sistemas de ensino, para que essas visões possam se complementar, estabelecendo um diálogo de modo a aproximar a formação da prática docente.

4. Qual Teoria dos Números poderia ser concebida como saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando a formação do professor na escola básica?

Sem a pretensão de prescrição do que deve ser ou do que é necessário, destacamos alguns aspectos que podem contribuir para a concepção de uma disciplina que trate de Teoria dos Números, visando à formação do professor da escola básica. Inicialmente, é importante considerar que uma disciplina da licenciatura não deve ser pensada, olhando-se apenas para o saber sábio que lhe dá origem, mas também para as demandas que são apresentadas para o professor na escola básica para ensinar os temas ligados ao campo. A área da Educação Matemática já possui uma produção considerável, abordando diferentes aspectos da construção dos conhecimentos matemáticos pelos alunos, que devem ser incorporados tanto nas discussões do saber a ensinar, no campo da noosfera, quanto nos sistemas de ensino e no espaço do sistema didático que envolve as relações entre aluno-professor-saber.

Outro aspecto importante apontado por Campbell e Zazkis, também revelado pelos dados coletados e pela análise feita, é que a Teoria dos Números deva ter um espaço próprio nos currículos da licenciatura, para que os aspectos caracterizadores dos números inteiros, presentes nos currículos da escola básica, possam ser devidamente tratados tanto como conhecimento do conteúdo, como conhecimento pedagógico do conteúdo e como conhecimento curricular.

A definição desta disciplina deve considerar, tanto na definição de seus objetivos, como na seleção de conteúdos, como nas abordagens a serem feitas, que:

1) **tópicos de Teoria dos Números estão presentes na educação básica:** os números naturais e os inteiros ocupam grande parte dos currículos de matemática da escola básica, e o seu ensino tem questões próprias que não podem ser desconsideradas na formação do professor;

2) **a Teoria dos Números é um espaço propício para o desenvolvimento de idéias matemáticas relevantes relativas aos números naturais e algumas também estendidas aos inteiros, presentes na matemática escolar,** tais como: a idéia de recorrência através da qual se definem muitas noções; a indução matemática; a questão da divisibilidade; questões relativas aos números primos e à estrutura multiplicativa dos inteiros;

3) **a Teoria dos Números é um campo propício para uma abordagem mais ampla da prova:** porque, ao tratar dos inteiros, permite que os estudantes trabalhem com algo que lhes é familiar; porque oferece ricas oportunidades para a exploração dos diferentes tipos de provas, permitindo ao licenciando perceber que a prova no ensino não deve ser compreendida da mesma forma que na pesquisa em matemática, perceber também que a prova tem diferentes funções não só de validar e convencer, mas principalmente de explicar;

4) **a Teoria dos Números é um campo propício para a investigação matemática:** porque a exploração de padrões e relações numéricas, o uso da recursão e da indução matemática, envolvendo os inteiros, as questões envolvendo a divisibilidade e os números primos sempre estiveram presentes na investigação matemática e podem ser explorados no ensino, oportunizando o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, de generalizar, testar e validar as conjecturas.

Sobre os conteúdos a serem abordados numa disciplina que estamos denominando Teoria Elementar dos Números, olhando para os PCN da escola básica, considerando a análise dos dados e em especial a avaliação dos entrevistados do que lhes foi apresentado na terceira questão da entrevista, podemos sugerir um núcleo, constituído dos seguintes temas:

Tópicos essenciais de Teoria Elementar dos Números

Números Inteiros*: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais; operações, algoritmos e propriedades; definição por recorrência (potências em N, seqüências, progressões aritméticas e geométricas), princípio da boa ordem e princípio da indução finita.* ***Divisibilidade****: algoritmo da divisão, máximo divisor comum,* *mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética.* ***Introdução à congruência módulo m:*** *definição, propriedades, algumas aplicações.* ***Equações diofantinas lineares****.*

Retomando a questão geradora, podemos afirmar, dentro dos limites deste trabalho, que a Teoria dos Números não tem um papel de destaque na formação, e os saberes que compõem as disciplinas em que assuntos de Teoria dos Números são tratados, são orientadas pelos valores e práticas da matemática científica (linguagem formal, rigor, ênfase no produto, etc), com o objetivo de ensinar matemática pela matemática. Levantamos possibilidades que podem re-significar esses saberes, tendo como fonte o saber científico, mas também os saberes escolares e as demandas que o seu ensino apresenta ao professor. Essas possibilidades passam pela concepção de que o conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, a teoria e a prática, devam estar presentes na constituição das disciplinas específicas da licenciatura em matemática.

Sabemos que essa proposta esbarra em dificuldades e tensões. Uma delas se refere à abordagem heurística dos conhecimentos matemáticos ou abordagem axiomática formal. Enquanto na educação matemática há uma valorização dos métodos heurísticos, incluindo a investigação matemática, na licenciatura, no ensino de conteúdos específicos há uma predominância da abordagem formal, conforme pudemos constatar nos livros didáticos de Teoria dos Números analisados, nos programas e no discurso de alguns dos entrevistados. Como esses livros são resultados de notas de aulas, podemos inferir que também está presente nas aulas, cuja tendência é a aula expositiva, em que se apresentam os conteúdos, começando pelas definições, propriedades e, em seguida os exercícios, com ênfase na demonstração.

Na escola básica, este dilema também aparece, mas dentro de uma perspectiva diferente, inclusive apontada por Hanna (2001), com base em resultados de pesquisas na área. Como a investigação matemática e a resolução de problemas foram enfatizadas nas propostas curriculares nas ultimas décadas[2], a prova tem sido deixada em segundo

[2] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) e o British National Curriculum (1984) enfatizaram os métodos heurísticos, em detrimento do uso da prova. O NCTM (2000) procurou amenizar esta situação, incluindo uma seção intitulada *Reasoning and Proof* , cujos objetivos são: reconhecer raciocínio e prova como aspectos fundamentais da matemática, fazer e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e a avaliar argumentos matemáticos e provas; selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova. (HANNA, 2000, pp. 10-11)

plano. Há uma crença de que as técnicas heurísticas são mais úteis, mais prazerosas, e que as provas não têm valor educacional, porque se transformam numa técnica sem significado para o aluno. O professor vê a prova mais como um impedimento para a compreensão do que como meio para tal. No entanto, estas abordagens não são incompatíveis, pois a prova, num sentido mais amplo, pode se constituir numa etapa da investigação matemática. Além do mais, como apontaram alguns entrevistados, outras abordagens são possíveis e desejáveis na formação do professor, como a abordagem histórica e epistemológica, a da etnomatemática, dentre outras.

Uma outra tensão, não completamente distinta e separada da anterior, é a questão da prova formal e da prova menos formal ou informal, conforme tratado por Pietropaolo (2005). Os professores pesquisados por esse autor resistiram a considerar provas menos formais como prova matemática, mesmo em se tratando da prova num contexto escolar, embora as valorizem. Essa atitude revela que as concepções dos professores estão ligadas ao modelo formal, vivenciado por eles na licenciatura.

Um outro ponto se refere à questão da valorização do processo e não apenas do produto. No ensino tradicional, como pudemos observar nos livros didáticos, as tarefas propostas para os alunos envolvem proposições, que já se sabe, são verdadeiras: tratam-se de produtos. As demonstrações devem seguir um caminho que vai das hipóteses às conclusões, enunciando corretamente os teoremas utilizados, usando corretamente as regras gramaticais da lógica. Seguindo o caminho dedutivo, fica escondido o processo de construção em que há espaço para o questionar, para o rasurar, o apagar. A demonstração aparece para o aluno como um texto formalizado, muitas vezes desnecessário, pois ele não percebe a necessidade da prova. (Barbin, 1996; Harel, 2002; Boavida, 2005).

Um outro ponto de tensão pode ser percebido, quando, por um lado, se reconhece que a prova rigorosa é condição *sine qua non* para a validação do conhecimento da matemática, portanto um elemento fundamental na sua construção, mas, por outro lado, constatam-se sérias dificuldades para o seu ensino em todos os níveis de escolaridade. Vários pesquisadores, como alguns de nossos entrevistados, apontam que os alunos têm dificuldades em realizar provas, principalmente quando vistas do ponto de vista dos matemáticos, afirmando que os alunos tiram pouco proveito deste ensino. (Nasser e Tinoco, 2001; Wheeler, 1990; Healy e Hoyles 2000).

Um outro ponto de tensão está relacionado ao papel das chamadas disciplinas específicas na formação do professor de matemática, e neste contexto surgem os dilemas relacionados ao por que ensinar, ao que ensinar e ao como ensinar. Há um objetivo claro, expresso na maioria dos currículos das licenciaturas, como pudemos constatar, de que é a formação do professor para a escola básica, a finalidade principal destes cursos. No entanto, as disciplinas específicas ainda estão marcadas pelas crenças de que "aquele que sabe o mais, sabe o menos", de que a formação sólida do professor passa pelo estudo da matemática pela matemática, com ênfase nos conteúdos e na abordagem axiomática formal. Ao realizar este trabalho, pudemos perceber que a Teoria Elementar dos Números é um campo propício para trabalhar o conjunto dos números inteiros, envolvendo aspectos históricos, epistemológicos e didáticos, dentre outros, oportunizando não só o trabalho com as noções matemáticas, mas também com as paramatemáticas, como a argumentação, a prova e a demonstração. No entanto, ainda, o foco é o conteúdo, tratado de modo tradicional, o que certamente os distancia do objetivo principal da licenciatura. Não nos referimos, ainda, a um dilema que talvez seja um dos mais sérios, que é a formação do formador. O formador não pode ignorar, ao trabalhar no curso de licenciatura, o conhecimento pedagógico do conteúdo, as questões históricas e epistemológicas ligadas aos conceitos com os quais trabalha. Pensamos que esse é um dos maiores desafios que se colocam para a condução dos cursos de licenciatura em matemática, hoje.

Avançamos no que diz respeito à identidade dos cursos, enquanto projetos. Entretanto, precisamos continuar a discutir como essas propostas podem chegar à sala de aula, principalmente nas disciplinas específicas de matemática. Acreditamos que o diálogo científico, entre os diversos atores envolvidos no processo de formação, com base na literatura existente e nas pesquisas realizadas, no âmbito de cada Instituição e no âmbito da noosfera, é o caminho para que possamos ter uma formação inicial ou continuada mais próxima da prática docente na escola básica. Para isso, é importante que as partes estejam disponíveis para ouvir e falar.

Nesse sentido é que esperamos que nosso trabalho possa contribuir, como fonte de novas discussões e de novas pesquisas, sugerindo, inclusive, que outras disciplinas matemáticas que compõem os currículos da licenciatura sejam também pesquisadas, para que o papel desse conjunto de disciplinas seja mais bem compreendido. Pensamos que as conclusões deste trabalho possam ser enriquecidas com pesquisas, que acompanhem o trabalho desenvolvido em cursos de Teoria dos Números, e com os professores da escola básica que vivenciaram esses cursos, buscando detectar como eles vêem sua formação com relação ao estudo dos números inteiros, dificuldades encontradas com as abordagens, principalmente no que se refere à abordagem axiomática, relações com a prática docente, etc.

Conforme indicado, é importante destacar que faltam produções, materiais didáticos para abordagens diversificadas, principalmente livros, para que a transposição didática dos conteúdos permita que eles se tornem ensináveis de forma significativa para a formação do professor.

5. Reflexões finais

Neste trabalho, procuramos compreender a Teoria dos Números, enquanto saber a ensinar, voltado para a formação inicial do professor da escola básica, procurando levantar possibilidades para re-significar essa área nos currículos da licenciatura em matemática. Acreditamos que conseguimos atingir esses objetivos, lembrando, mais uma vez, que a compreensão é um modo fundamental de conhecimento que busca captar os significados de uma situação ou fenômeno, movendo-se na esfera do concreto, da intuição global, do subjetivo, enquanto a explicação move-se na esfera do lógico, do analítico, do objetivo. A compreensão inclui, portanto, subjetividade, sentimentos, pensamentos, finalidades e relação com os valores, por isso *comporta limites e riscos de erro, inclusive o risco da incompreensão, pois uma compreensão só pode compreender o que compreende...* (MORIN, 1999, p.158). Assim, procuramos, conforme proposto por Morin, associar o nosso compreender com explicações, advindas dos referenciais e teóricos e dos dados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia.** Tradução de A. Bosi. 2 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BALACHEFF, N. Preuve et demonstration en mathematicques au college. In: **Recherches en didatique des mathématiques.** Grenoble, La Pensée Sauvage, 1982.

_____________. Processus de preuves et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics.** 18(2) 147-176; 1987.

BARBIN, E. Quelles conceptions epistemologiques de la demonstration pour quels apprentissages? In: BARBIN, E.; DOUADY, R. **Enseignement des mathématiques: des repères entre savoirs, programmes et pratiques.** Topiques, Pont-A-Mousson, 1996.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa/Portugal: Edições 70 LDA, 1977.

BOAVIDA, A. M. R. A argumentação na aula de matemática: olhares sobre o trabalho do professor. In: AMRB: XVI- SIEM, Évora, 2005. http://fordis.ese.jps.pt/docs/siem/texto57.doc. Acesso em 15/09/2006.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: (**5ª a 8ª séries). Brasília: MEC, 1998.

____________________________ Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.

CAMPBELL, S. R., & ZAZKIS, R.(Eds.)**. Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction**. Westport, CT: Ablex, 2002.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 19, n.2, p.p 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.** Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

DAVIS, J. P.; HERSH, R. **Matemática e realidade**. 3.ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 1986.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Revista Zetetiké.** n.1, mar (1995). Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

FIORENTINI, D. et al. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. In: **Educação em Revista – Dossiê: Educação Matemática.** Belo Horizonte, UFMG, n.36, p. 137-160, 2002.

GONÇALVES, A.; **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an overview. In: **Educational studies in mathematics.** v. 44. Kluwer Academic Publisher, 2001, p.5-23.

HAREL, G; SOWDER, L. Students' proof schemes: results from exploratory studies. In: **CBMS Issues in Mathematics Education.** v. 7, 1998. http://math.ucsd.edu/~harel. Acesso em 5/06/2006.

HEALY, L.; HOYLES, C. A study of proofs conceptions in algebra. In: **Journal for research in mathematics education.** v.31, n.4, 2000, p. 396-428.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. v.1. Rio de Janeiro, IMPA, 1993

__________. **Elementos de aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A Construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas.** Tradução de Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Porto Alegre: Artes Médicas; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

LEVEQUE, W.J, **Elementary Theory of Numbers**. Canada: General Publishing Company, Ltd., 30, 1990.

LINS, R.C.; GIMENES, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** 4.ed. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LOPES, A.R.C.; MACEDO, E. A estabilidade do currículo disciplinar: o caso das ciências. In: **Disciplinas e integração curricular: histórias e políticas.** Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MARTIN, W. G.; HAREL, G. Proof frames of preservice elementary teachers. In: **Journal for Research In Mathematics Education,** 1989, v.20, n. 1, p. 41-51. http://math.ucsd.edu/~harel. Acesso em 5/06/2006.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: uma introdução à matemática.** 3.ed., São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1971.

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica.** Tese (Doutorado em Educação). UFMG, Faculdade de Educação. Belo Horizonte, 2004.

MORIN, E. **O método 3: a consciência da consciência.** Tradução de Juremir Machado da Silva. 2.ed. Porto Alegre: Sulina, 1999.

NASSER, L.; TINOCO, L. **A argumentação e provas no ensino de matemática**. Instituto de Matemática – Projeto Fundão, 2001

NIVEN, I.; ZUCKERMAN, H. S.; MONTGOMERY, H. L. *An introduction to the Theory of Numbers.* 5th ed. New York: John Wiley, 1991.

PERRENOUD, P. Le role de la formation à l'enseignement dans la construction des disciplines scolaires. **Education et francophonie – Revue scientifique virtuelle.** Association Canadiense d'éducation de langue française. vol. XXVIII, n. 2, automnehiver 2000. Disponível em: http//www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/28-2/05-Perrenoud.html. Acesso em 27/02/2006.

PIETROPAOLO, R.C.; **(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, 2005.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SHOKRANIAN, S.; SOARES, M.; GODINHO, H. **Teoria dos Números.** 2.ed., Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999.

SHULMAN, L.S. Those who understand: knowlege growth in teaching. In:
Educational Research. Frebruary 1986.

SIDKI, S. Introdução à teoria dos números. 10º COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA. Poços de Caldas, jul. de 1975. IMPA.

SZTAJN, P. O que precisa saber um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. **Educação Matemática em revista.** n.11ª, p.17-28, 2002.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 4 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

WHEELER, D. Aspects of mathematical proof. **Interchange,** Toronto: OISE, Press, n. 21, p. 1-5, 1990.